بين أن المستويات (ABC) تمر بنقطة ثابتة.

(استعمل النقطة S' بحيث $\overrightarrow{SS'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$ و G مركز ثقل المثلث ABC ثم برهن أن $S' = \Omega$).

13 $ABCD$ رباعي وجوه و G مرجح الجملة $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$ ، $(D,1)$

G_1 مركز ثقل المثلث ABC

1- بين أن G تنتهي إلى المستقيم (DG_1)

2- نفرض أن الوجه ABC ثابت وان النقطة D متغيرة على مستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC)

ما هو المحل الهندسي للنقطة G لما تتحرك النقطة D في المستوي (P) ؟

14 أوجد ثلاثة أعداد حقيقية مجموعها هو 30 والفرق بين أكبر عددين من الثلاثة هو 6 والفرق بين أصغر عددين هو 3

15 - احسب أنصاف أقطار ثلاث دوائر متماسة مثنى مثنى. إذا علمت أن المسافات بين مراكزها O, P, Q هي $OP = 21cm$ ، $PQ = 23cm$ و $OQ = 22cm$

16 حدد عدد طبيعي مشكل من رقمين علما أنه :

- يساوي 3 مرات مجموع رقميه.
- إذا ضربناه في العدد 3 النتيجة المحصل عليها هي مربع مجموع رقميه.

17 من أجل حل مشكلة رياضية يتقدم ثلاثة أشخاص A ، B ، C بحيث :

- الشخصان A و B يحلانها في 10 دقائق.
- الشخصان B و C يحلانها في 20 دقيقة.
- الشخصان A و C يحلانها في 12 دقيقة.

ما هو الوقت اللازم لكل شخص على حدة لحل هذه الشكلة ؟

الدرس 14

التّشابهات المستوية

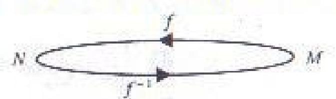
1 عموميات حول التحويلات المستوية

1-1 تعاريف ومصطلحات

في مستو إذا أرفقنا كل نقطة M بنقطة وحيدة N نقول عندئذ أننا عرفنا تطبيق من المستوي في نفسه.

- القول عن تطبيق f انه تقابل يعني أن كل نقطة N هي صورة لنقطة وحيدة M بـ f
- التطبيق التقابلي من المستوي في نفسه يسمى تحويلا
- نسمي التطبيق المطابق الذي نرمز له بـ Id التحويل الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M نفسها أي $Id(M) = M$ من أجل كل M .
- القول أن $f = g$ يعني أنه من أجل كل نقطة M يكون $f(M) = g(M)$
- اذا كان f تحويلا وكل نقطة N نرفقها بنقطة M بحيث $f(M) = N$ نكون عندئذ قد عرفنا تحويلا عكسيا لـ f نرمز له بـ f^{-1} ونكتب :

$N = f(M)$ تكافئ $M = f^{-1}(N)$



مثال -

- التحويل العكسي للدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ هو دوران مركزه Ω وزاويته $-\theta$
- التحويل العكسي للتحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k هو تحاكي مركزه Ω ونسبته $\frac{1}{k}$.

- التحويل العكسي للتناظر المحوري الذي محور (Δ) هو نفسه.
- التحويل العكسي للإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ هو إنسحاب شعاعه $-\vec{u}$.

1 - 2 تركيب التحويلات

f و g تحويلان، نعرف التحويل $g o f$ كما يلي
من أجل كل نقطة M يكون $g o f(M) = g(f(M))$

ملاحظة

يمكن تمديد هذا التعريف بحيث يشمل مركب ثلاثة تحويلات او اكثر، ومنه يكون $f o g o h$ هو التحويل $(f o g) o h$ أو $f o(g o h)$

مبرهنة ❶

- إذا حول f و g المستقيمات إلى مستقيمات والدوائر إلى دوائر فإن $g o f$ يقوم بنفس الدور كذلك.
- إذا حافظ f و g على المسافات والزوايا (الموجهة والهندسية) ، التوازي ، التعامد ، المرجح أو المساحات فإن $g o f$ يقوم بنفس الدور كذلك.

مبرهنة ❷

إذا ضاعف التحويل f المسافات بعدد حقيقي $k > 0$ ، وإذا ضاعف التحويل g المسافات بعدد حقيقي $k' > 0$ فإن التحويل $g o f$ يضاعف المسافات بالعدد الحقيقي $k k'$.

الإثبات

لتكن A_1 و B_1 صورتي A و B بالتحويل f بحيث $A_1 B_1 = k A B$
وإذا حول g النقطتين A_1 و B_1 إلى A_2 و B_2 بحيث $A_2 B_2 = k' A_1 B_1$
فإن التحويل $g o f$ يحول A و B إلى A_2 و B_2 .
$A_2 B_2 = k' A_1 B_1 = k'(k A B) = k' k A B$
إذن التحويل gof يضاعف المسافة بالعدد الحقيقي $k k'$.

خاصية

f و g تحويلان نقطيان و f^{-1} و g^{-1} تحويليهما العكسين على التوالي :
- إذا كان $h = f o g$ فإن $f = h o g^{-1}$ و $g = f^{-1} o h$
- إذا كان $f o g = Id$ فإن $f = g^{-1}$ و $g = f^{-1}$
- إذا كان $f o f = Id$ فإن $f = f^{-1}$

تمرين تدريبي ❶

في معلم متعامد ومتجانس مباشر $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، الكتابتين المركبتين للتحويلين T_1 و T_2 هما على التوالي $Z' = iZ + 2$ و $Z' = 3Z + 2i$.
ما هي الكتابة المركبة للتحويل $T_1 o T_2$ ؟

✓ الحل

إذا كانت الكتابة المركبة للتحويل النقطي T_1 هي $Z' = f_1(Z)$
والكتابة المركبة للتحويل النقطي T_2 هي $Z' = f_2(Z)$
فإن الكتابة المركبة للتحويل النقطي $T_1 o T_2$ هي $Z' = f_1 o f_2(Z)$

$Z \xrightarrow{f_2} Z_2 \xrightarrow{f_1} Z_1$

$f_1 o f_2$

$Z_2 = 3Z + 2i$
$Z_1 = i Z_2 + 2 = i(3Z + 2i) + 2 = 3iZ$
ومنه تكون الكتابة المركبة للتحويل $T_1 o T_2$ هي $Z' = 3iZ$.

تمرين تدريبي ❷

في معلم متعامد ومتجانس مباشر ، الكتابة المركبة للتحويلين T_1 و T_2 هما على التوالي $Z' = 2iZ + i$ ، $Z' = i\overline{Z} + i$
- ما هي الكتابة المركبة للتحويلين T_1^{-1} و T_2^{-1} ؟

✓ الحل

- إذا كان لتحويل T كتابة مركبة $Z' = f(Z)$ فإن $Z = f^{-1}(Z')$
لإيجاد الكتابة المركبة لـ T^{-1} نعبر عن Z بدلالة Z'
$Z' = 2iZ + i$ يكافئ $Z = -\frac{i}{2}Z' - \frac{1}{2}$
وعليه فإن التحويل T_1^{-1} يحول النقطة M' ذات اللاحقة Z' إلى النقطة M ذات اللاحقة Z
بحيث: $Z = -\frac{i}{2}Z' - \frac{1}{2}$ إذن الكتابة المركبة لـ T_1^{-1} هي $Z' = -\frac{i}{2}Z - \frac{1}{2}$
من المساواة $Z' = i\overline{Z} + i$ ينتج $Z = i\overline{Z'} - 1$
وعليه فإن التحويل T_2^{-1} يحول النقطة M' ذات اللاحقة Z' إلى النقطة M ذات اللاحقة Z
بحيث: $Z = i\overline{Z'} - 1$ إذن الكتابة المركبة لـ T_2^{-1} هي $Z' = i\overline{Z} - 1$

❷ التشابه

تعريف

التشابه هو تحويل يحافظ على نسب المسافات .
من أجل كل النقط M ، N ، P ، Q مع $M \neq N$ و $P \neq Q$ التي صورها على التوالي : M' ، N' ، P' ، Q' لدينا $\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ}$
وبصفة أخرى التشابه هو التحويل الذي يضاعف المسافات اي يوجد عدد حقيقي $k > 0$ الذي

يسمى نسبة التشابه بحيث من أجل كل نقطتين M و N صورهما على الترتيب M' و N'
لدينا $M'N' = k\,MN$

خواص

1) مركب تشابهين نسبتهما على التوالي k و k' هو تشابه نسبته $k\,k'$.
2) التحويل العكسي للتشابه الذي نسبته k بحيث $k \rangle 0$ هو تشابه نسبته $\frac{1}{k}$.
3) إذا كان S تشابه نسبته k و ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين فإن المثلث $A'B'C'$ قائم في A' ومتساوي الساقين حيث:
$A' = S(A)$ و $B' = S(B)$ و $C' = S(C)$
4) إذا كان ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين و S و S' تشابهين بحيث:
$S(A) = S'(A)$ و $S(B) = S'(B)$ و $S(C) = S'(C)$ فإن $S = S'$

الإثبات

2) ليكن S تشابه نسبته k.
نضع $S^{-1}(M) = M_1$ و $S^{-1}(N) = N_1$ عندئذ $M_1 = S(M)$ و $N_1 = S(N)$
وبما أن S تشابه نسبته k فإن $MN = k\,M_1N_1$ ومنه نستنتج $M_1N_1 = \frac{1}{k}MN$.
إذن S^{-1} هو تشابه نسبته $\frac{1}{k}$.

3) ـ من المساواة $AB = AC$ نستنتج $k\,AB = k\,AC$ أي $A'B' = A'C'$
وهذا يعني أن المثلث $A'B'C'$ متقايس الساقين.
ـ من المساواة $AB^2 + AC^2 = BC^2$ نستنتج أن $k^2 AB^2 + k^2 AC^2 = k^2 BC^2$
أي $B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2$ وهذا يعني أن المثلث $A'B'C'$ قائم في A'.
إذن المثلث $A'B'C'$ قائم في A' ومتساوي الساقين.

4) نسمي A'، B'، C' صور A، B، C على التوالي بالتشابه S وكذلك بالتشابه S'،
k و k' نسبتي S و S' على التوالي.
- نريد إثبات أن $k = k'$
من الفرضية نستنتج أن $A'B' = k\,AB$ و $A'B' = k'\,AB$
لكن $AB \neq 0$ إذن $k = k'$.
- لإثبات أن $S = S'$ نثبت أنه من أجل كل نقطة M يكون $S(M) = S'(M)$
نفرض أن $M_1 = S(M)$ و $S'(M) = M_2$ ونبين أن $M_1 = M_2$.
لدينا $A'M_1 = k\,AM$ و $A'M_2 = k\,AM$ وعليه $A'M_1 = A'M_2$
إذا كان $M_1 \neq M_2$ فإن A' تنتمي إلى محور القطعة $[M_1M_2]$
نفس الشيء بالنسبة إلى النقطتين B'، C' أي أنهما تقعان على محور $[M_1M_2]$
وهذا يخالف الفرض كون A'، B'، C' ليست على استقامة واحدة.
إذن $M_1 = M_2$ وعليه $S = S'$

تمرين تدريبي

في المستوي المركب، ليكن T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث $Z' = (1+i)Z + 1$
بين أن T تشابه ثم حدد نسبته.

✓ الحل

لإثبات أن T تشابه نبحث عن إمكانية وجود عدد حقيقي k $(k \rangle 0)$ بحيث من أجل كل نقطتين M و N صورتيهما على الترتيب M' و N' لدينا:
$M'N' = k\,MN$
$T(M) = M'$ تكافئ $Z_{M'} = (1+i)Z_M + 1$ ....(1)
$T(N) = N'$ تكافئ $Z_{N'} = (1+i)Z_N + 1$ ....(2)
بطرح (1) من (2) نجد $Z_{N'} - Z_{M'} = (1+i)(Z_N - Z_M)$
ومنه نستنتج أن $|Z_{N'} - Z_{M'}| = |1+i|\,|Z_N - Z_M|$
بما أن $|1+i| = \sqrt{2}$ و $MN = |Z_N - Z_M|$ و $|Z_{N'} - Z_{M'}| = M'N'$ فإن $M'N' = \sqrt{2}\,MN$
وهذا يعني أن T تشابه نسبته $k = \sqrt{2}$.

3. التعبير عن التشابه بالأعداد المركبة

مبرهنة

القول أن التحويل S هو تشابه يكافئ القول أنه في كل معلم متعامد ومتجانس مباشر S له كتابة مركبة من الشكل $Z' = aZ + b$ أو $Z' = a\bar{Z} + b$ حيث:
a و b عددين مركبين ثابتين و $a \neq 0$

نتيجة

إذا كان للتشابه S نقطتين صامدتين A و B فإنه إما أن يكون تحويلا مطابقا Id وإما أن يكون تناظرا محوريا محوره (AB).

الإثبات

نختار معلما متعامدا ومتجانسا مباشرا مركزه النقطة A بحيث يكون محور فواصله منطبقا على المستقيم (AB) عندئذ $Z_A = 0$ و $Z_B \neq 0$.
إذا كانت لـ S كتابة مركبة من الشكل $Z' = aZ + b$
فإن المساواة $S(A) = A$ تستلزم $Z_A = aZ_A + b$ أي $b = 0$
والمساواة $S(B) = B$ تستلزم $Z_B = aZ_B$ أي $a = 1$

وتكون الكتابة المركبة لـ S هي $Z'=Z$ وهذا يعني أن S تحويل مطابق .

- إذا كانت لـ S كتابة مركبة من الشكل $Z'=a\overline{Z}+b$ نتحصل على $Z'=\overline{Z}$

إذن S هو تناظر محوري محوره (AB) .

ملاحظة

إذا كان للتشابه S ثلاث نقط صامدة ليست على استقامة واحدة فإن S هو Id .

تمرين تدريبي

S تحويل كتابته المركبة هي $Z'=3i\overline{Z}-2(1+i)$

1) بين أن S هو تشابه نسبته 3 .

2) بين أن النقطة I ذات اللاحقة $1+i$ صامدة بـ S .

3- أ) ما هي لاحقة النقطة A' صورة A ذات اللاحقة 2 بالتحويل S ؟

ب) بين أن النقط A ، A' و I على استقامة واحدة.

✓ الحل

1) لتكن M و N نقطتان صورتيهما على التوالي M' و N' بالتحويل S .

إذن $Z_{M'}=3i\overline{Z}_M-2(1+i)$ و $Z_{N'}=3i\overline{Z}_N-2(1+i)$.

بالطرح نجد $Z_{N'}-Z_{M'}=3i(\overline{Z}_N-\overline{Z}_M)$ ومنه نستنتج $|Z_{N'}-Z_{M'}|=|3i|\,|\overline{Z}_N-\overline{Z}_M|$

لكن $|3i|=3$ و $|Z_{N'}-Z_{M'}|=M'N'$ و $|\overline{Z}_N-\overline{Z}_M|=MN$

إذن $M'N'=3MN$

وهذا يعني أن S تشابه نسبته 3 (أي نسبة التشابه هي $|a|$).

2) I صامدة بالتحويل S يعني أن $S(I)=I$ اي $Z_I=3i\overline{Z}_I-2(1+i)$.

$3i\overline{Z}_I-2(1+i)=3i(1-i)-2(1+i)=3i+3-2-2i=1+i=Z_I$

ومنه I صامدة بالتحويل S .

3) أ) $S(A)=A'$ تكافئ $Z_{A'}=3i\overline{Z}_A-2(1+i)$

لدينا $Z_{A'}=6i-2-2i=-2+4i$ إذن A' لاحقتها $-2+4i$

لكي تكون النقط A ، A' ، I على استقامة واحدة يجب أن يكون $\frac{Z_A-Z_{A'}}{Z_A-Z_I}=\alpha$ مع $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\frac{Z_A-Z_{A'}}{Z_A-Z_I}=\frac{2+2-4i}{2-1-i}=\frac{4(1-i)}{1-i}=4$$

إذن النقط A ، A' ، I على استقامة واحدة

4 - التشابهات المستوية المباشرة

4-1 التشابه المباشر

القول عن تشابه أنه مباشر يعني أنه يحافظ على الزوايا الموجهة.

مثال - ♦

كل من الإنسحاب ، الدوران ، التحاكي وتركيباتها تحافظ على الزوايا الموجهة أي أنها تشابهات مباشرة .

مبرهنة

القول أن التحويل S تشابه مباشر يكافئ القول أن كتابته المركبة في كل معلم متعامد ومتجانس مباشر هي من الشكل $Z'=aZ+b$ مع a ، b عددين مركبين ثابتين و $a\neq 0$

الإثبات

للتشابه كتابتين مركبتين ممكنتين هما $Z'=aZ+b$ و $Z'=a\overline{Z}+b$

لتكن M' ، N' ، P' صور النقط المختلفة مثنى مثنى M ، N ، P بالتحويل S .

- إذا كان $Z'=aZ+b$

فإن :

$$\frac{Z_{P'}-Z_{M'}}{Z_{N'}-Z_{M'}}=\frac{(aZ_P+b)-(aZ_M+b)}{(aZ_N+b)-(aZ_M+b)}=\frac{Z_P-Z_M}{Z_N-Z_M}$$

ومنه نستنتج $(\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{M'P'})=(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP})$

إذن هناك حفظ للزوايا الموجهة وبالتالي S تشابه مباشر .

- إذا كان $Z'=a\overline{Z}+b$ وبطريقة مماثلة نبين أن :

$(\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{M'P'})=-(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP})$

وهذا يعني أن S لا يحفظ الزوايا الموجهة إذن هذه الكتابة لا تعبر عن التشابه المباشر .

ملاحظة

كل من التشابه الباشر وغير المباشر يحفظ الزوايا الهندسية و $|a|$ هي نسبة التشابه.

تمرين تدريبي 1

في المستوي الموجه المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ،

T تحويل نقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(x,y)$ النقطة $M'(x',y')$

بحيث $x'=-2y+3$ و $y'=2x$

بين أن T تشابه مباشر .

✓ الحل

لتكن Z لاحقة M و Z' لاحقة M'.

$Z' = x' + iy' = -2y + 3 + 2ix = 2i^2 y + 3 + 2ix - 2i(x+iy) + 3 = 2iZ + 3$

إذن T تشابه مباشر نسبته $k = |a| = 2$

4-2 تعيين التشابه المباشر الذي يحول (A, B) إلى (A', B')

مبرهنة

A ، B ، A' ، B' أربع نقط بحيث $A \neq B$ و $A' \neq B'$

يوجد تشابه مباشر S وحيد بحيث $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$

الإثبات

لتكن Z_A ، Z_B ، $Z_{A'}$ ، $Z_{B'}$ لواحق النقط A ، B ، A' ، B' على الترتيب في المستوي المركب.

إثبات وجود ووحدانية تشابه مباشر S ذو الكتابة المركبة $Z' = aZ + b$ بحيث:

$S(A) = A'$ و $S(B) = B'$ يؤول إلى إثبات وجود ووحدانية عددين مركبين a و b مع $a \neq 0$

بحيث $\begin{cases} Z_{A'} = aZ_A + b \text{ ......(1)} \\ Z_{B'} = aZ_B + b \text{ .....(2)} \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد $Z_{A'} - Z_{B'} = a(Z_A - Z_B)$

بما أن $A' \neq B'$ و $A \neq B$ فإن $Z_A - Z_B \neq 0$ و $Z_{A'} - Z_{B'} \neq 0$

وعليه $a = \frac{Z_{A'} - Z_{B'}}{Z_A - Z_B}$ و $a \neq 0$

إذن توجد قيمة وحيدة لـ a وبعد تعويضها في (1) نجد قيمة وحيدة لـ b.

إذن يوجد تشابه مباشر وحيد يحول A إلى A' و B إلى B'

نتيجة

الشرط اللازم لوجود تشابه مباشر وحيد يحول المثلث ABC إلى المثلث $A'B'C'$

مع $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$ و $S(C) = C'$ هو:

$(\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{A'B'}, \vec{A'C'})$ و $(\vec{BC}, \vec{BA}) = (\vec{B'C'}, \vec{B'A'})$

وهذا الشرط كاف أن تحقق.

ملاحظة

إذا كانت الكتابة المركبة لـ S هي $Z' = aZ + b$ فإن $a = \frac{Z_{A'} - Z_{B'}}{Z_A - Z_B}$

إذن $|a| = \frac{A'B'}{AB}$ و $arg(a) = (\vec{AB}, \vec{A'B'})$

وعليه فإن نسبة S هي $\frac{A'B'}{AB}$ وزاويته $(\vec{AB}, \vec{A'B'})$

تمرين تدريبي

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(o, \vec{i}, \vec{j})$

النقط A ، B ، A' ، B' لواحقها على الترتيب $1+i$ ، $2-i$ ، -2 ، $2+2i$

عين التشابه المباشر الوحيد S بحيث $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$

✓ الحل

بما أن $A' \neq B'$ و $A \neq B$ فإنه وحسب المبرهنة السابقة يوجد تشابه مباشر وحيد بحيث $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$ كتابته المركبة من الشكل $Z' = aZ + b$

a ، b يحققان الجملة $\begin{cases} -2 = a(1+i) + b \text{ .....(1)} \\ 2+2i = a(2-i) + b \text{ .....(2)} \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد $-4-2i = a(-1+2i)$

ومنه $a = \frac{-4-2i}{-1+2i}$

$a = \frac{(-4-2i)(-1-2i)}{5}$

$= \frac{4+8i+2i-4}{5} = 2i$

نعوض قيمة a في (1) نجد $b = -2i$ وبالتالي $Z' = 2iZ - 2i$

إذن يوجد تشابه مباشر وحيد نسبته $|a| = |2i| = 2$

5. الكتابة المختصرة للتشابه المباشر

مبرهنة

كل تشابه مباشر هو إما إنسحاب أو تركيب دوران وتحاكي لهما نفس المركز.

الإثبات

لتكن $Z' = aZ + b$ مع $a \neq 0$ الكتابة المركبة للتشابه المباشر S.

- إذا كان $a = 1$ فإن $Z' = Z + b$ وبالتالي S إنسحاب
- إذا كان $a \neq 1$ ، لنثبت أولا أنه توجد نقطة وحيدة I بحيث $S(I) = I$

وهذا يؤول إلى إثبات أن المعادلة $Z' = Z$ لها حل وحيد

$Z' = Z$ تكافئ $(1-a)Z = b$ تكافئ $Z = \frac{b}{1-a}$

لتكن ω بحيث $\omega = \frac{b}{1-a}$ لاحقة I ونضع $a = ke^{i\theta}$ حيث $k = |a|$

إذن $Z' - w = aZ + b - w$

$= aZ + (1-a)\omega - \omega = a(Z - \omega)$

نسمي h التحاكي الذي مركزه I ونسبته k و r الدوران الذي مركزه I وزاويته θ

لنبين أن $S=hor=roh$

الكتابتان المركبتان لـ h و r على التوالي هما :

$Z'=e^{i\theta}(Z-\omega)+\omega$ و $Z'=k(Z-\omega)+\omega$

إذن الكتابة المركبة لـ hor هي:

$Z'-\omega=a(Z-\omega)$ أي $Z'=ke^{i\theta}(Z-\omega)+\omega$

إذن $S=hor$ وبنفس الطريقة نبين أن $S=roh$

نتيجة 1

كل تشابه مباشر يختلف عن الإنسحاب له نقطة صامدة وحيدة ترمز لها بـ I ، هذا التشابه يكتب على الشكل المختصر :

$$S=h(I,k)or(I,\theta)$$
$$=r(I,\theta)oh(I,k)$$

نقول عندئذ أن التشابه المباشر S له مركز I ونسبة k وزاوية θ ونرمز له بـ $S(I,k,\theta)$

نتيجة 2

القول أن التحويل S تشابه مباشر نسبته k $(k\neq1)$ وزاويته θ يكافئ القول أن كتابته المركبة هي من الشكل $Z'=ke^{i\theta}Z+b$

إذا كانت M' صورة M $(M\neq I)$ بالتشابه المباشر الذي مركزه I ونسبته k وزاويته θ

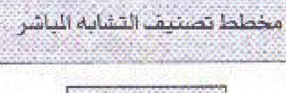
فإن $\begin{cases} \overrightarrow{IM'}=k\,\overrightarrow{IM} \\ (\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'})=\theta+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

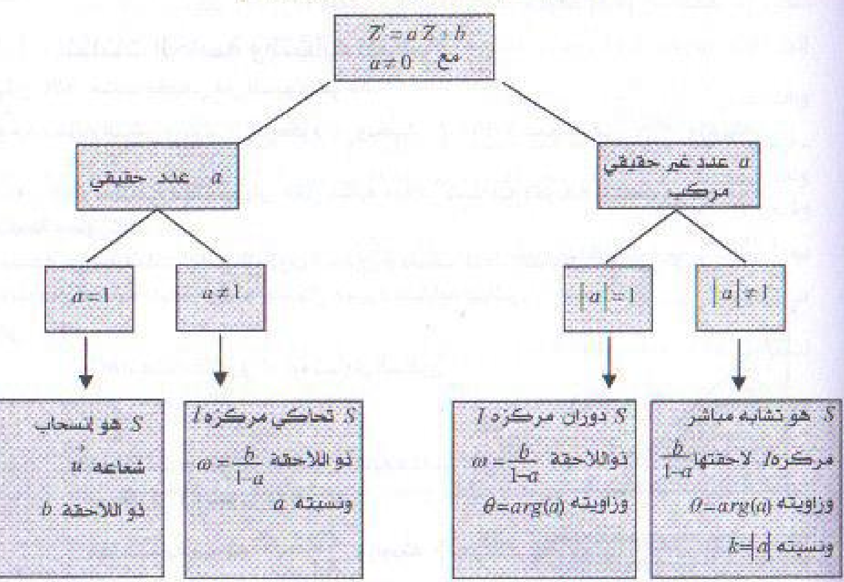
- إذا كانت I ، M ، M' ثلاث نقط مختلفة فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد مركزه I بحيث $S(M)=M'$ مع $k=\frac{IM'}{IM}$ و $\theta=(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'})$
- كل تشابه مباشر يحول المستقيمات إلى مستقيمات ، الدوائر إلى دوائر ويحفظ التعامد والتوازي والمرجح.

وبصفة خاصة S يحول المثلث ABC إلى مثلث $A'B'C'$ يشابهه في الاتجاه المباشر.

ملاحظة

- إذا كان h تحاكيا نسبته k $(k<0)$ ومركزه النقطة O فإن h تشابه مباشر مركزه النقطة O ونسبته $-k$ وزاويته π.
- إذا كان T مركب دوران وتحاكي نسبته سالبة فإن T هو تشابه مباشر





تمرين تدريبي

1) اعط العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي كتابته المركبة هي :

$Z'=(1-i)Z+1+i$

2) اوجد الكتابة المركبة للتشابه المباشر الذي مركزه I لاحقتها $1-i$ ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

الحل :

1) لدينا $a=(1-i)$ و $b=1+i$

نسبة التشابه المباشر هي $|a|=\sqrt{2}$ وزاويته هي $arg(a)=\frac{-\pi}{4}$

ومركزه النقطة I لاحقتها $\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{1+i}{i}=-i+1$ أي $I(1,-1)$

2) بما أن $k=2$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$ فإن $a=2e^{i\frac{\pi}{3}}=2(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3})$

بالحساب نجد $a=1+\sqrt{3}i$ و $b=(1-a)\omega=-\sqrt{3}i(1-i)=-\sqrt{3}-\sqrt{3}i$

إذن الكتابة المركبة لهذا التشابه المباشر هي $Z'=(1+\sqrt{3}i)Z-\sqrt{3}-\sqrt{3}i$

6. المثلثات الخاصة والتشابه المباشر

6-1 المثلثات الخاصة والتشابه المباشر

ليكن ABC مثلث كيفي من المستوي الموجه.

يوجد تشابه مباشر وحيد S مركزه A وبحيث $S(B)=C$ نسبته هي $\frac{AC}{AB}$ وزاويته $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ نستنتج مما سبق أن كل تشابه مباشر نستطيع تعريفه بإعطاء مركزه ونقطة وصورتها.

- بصفة خاصة المثلث القائم المتساوي الساقين أو نصف المثلث المتقايس الأضلاع توحي لنا باستعمال التشابه المباشر وهذه الأشكال مميزة للتشابه المباشر.

مثال - ♦

ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$.

هذا المثلث يوحي لنا استعمال تشابه مباشر مركزه C ويحول A إلى B.

هذا التشابه نسبته $\frac{CB}{CA}=\sqrt{2}$ وزاويته $\theta=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{4}$

- إذا كان ABC مثلث متقايس الأضلاع فإنه يوجد تشابه مباشر مركزه النقطة A يحول C' إلى C زاويته $\frac{\pi}{3}$ ونسبته $k=\frac{AC}{AC'}=2$

- يوجد تشابه مباشر مركزه A يحول B إلى A' وزاويته $\frac{\pi}{6}$ ونسبته $k=\frac{AA'}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

6-2 المثلثات المتشابهة

التعريف المعطى في السنة الأولى ثانوي المتعلق بمثلثين متشابهين هو كالتالي:

"مثلثين متشابهين هما مثلثين تكون زوايا أحدهما تساوي زوايا الآخر"

• ABC مثلث و S تشابه مباشر بحيث $S(A)=A'$ و $S(B)=B'$ و $S(C)=C$

ومنه $A'B'C'$ هو صورة ABC بالتشابه المباشر S و ABC هو صورة $A'B'C'$ بـ S^{-1}

وبما أن التشابه المباشر يحفظ الزوايا الموجهة فإنه يحفظ الزوايا الهندسية كذلك.

ونقول أن:

المثلثين ABC و $A'B'C'$ المتشابهين في الاتجاه المباشر متشابهان بالمعنى المعطى في السنة الأولى.

• والآن نبين أنه إذا كان لدينا مثلثين ABC و $A'B'C'$ بحيث:

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$ و $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=(\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{B'A'})$

فهل يوجد تشابه مباشر وحيد S يحول ABC إلى $A'B'C'$ ؟

- نفرض أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان بمعنى تعريف السنة الأولى.

لتكن D نقطة من $[AB]$ بحيث $AD=A'B'$ و E نقطة من $[AC]$ بحيث $AE=A'C'$

إذن (DE) يوازي (BC) وحسب نظرية طاليس فإن $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

وهذا يعني $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}$ .... (1)

- ليكن S التشابه المباشر الوحيد بحيث $S(A)=A'$ و $S(B)=B'$

ولنبين أن $S(C)=C'$ ومن أجل ذلك نفرض أنه توجد صورة C'' للنقطة C بالتشابه S ونبين أن $C''=C'$

بما أن C'' صورة C بالتشابه S فإن $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C''}{AC}$ .... (2)

من (1) و(2) نجد أن $A'C''=A'C'$ .... (3)

لدينا $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C''})$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$

ومنه نستنتج $(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})=(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C''})$ .... (4)

من(3) و (4) نستنتج أن $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC''}$ وهذا يعني أن C'' منطبقة على C'

إذن $S(C)=C'$ وعليه يوجد تشابه مباشر وحيد S يحول ABC إلى $A'B'C'$

نتيجة

إذا كانت زوايا أحد مثلثين تساوي زوايا الآخر فإنه يوجد دائما تشابه مباشر يحول أحدهما إلى الآخر.

7 التقايسات المستوية

7-1 التقايس

تعريف 1

نسمي تقايس كل تحويل يحفظ المسافات أي كل تشابه نسبته 1 .

الكتابة المركبة للتقايس هي إذن $Z'=aZ+b$ أو $Z'=a\overline{Z}+b$ مع $|a|=1$ أي $a=e^{i\theta}$

مثال - ♦

كل من الإنسحاب ، الدوران ، التناظر المحوري هي تقايسات.

تعريف 2

التقايس الذي يحفظ الزوايا الموجهة هو إزاحة (تقايس موجب).

التقايس الذي يحول زاوية موجهة إلى زاوية موجهة معاكسة لها هو ضد إزاحة (تقايس سالب)

مثال - ♦

الإنسحاب والدوران هما الإزاحتين الوحيدتين في المستوي.

التناظر المحوري هو ضد إزاحة .

7 - 2 تركيب إزاحتين

مركب دورانين

مبرهنة

r_1 دوران زاويته θ_1 و r_2 دوران زاويته θ_2

- إذا كان $\theta_1+\theta_2 \neq 2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ فإن $r_2 o r_1$ هو دوران زاويته $\theta_1+\theta_2$
- إذا كان $\theta_1+\theta_2=2k\pi$ فإن $r_2 o r_1$ إنسحاب.

الإثبات

في المستوي الموجه تكون الكتابة المركبة لـ r_1 و r_2 هما $Z'=e^{i\theta_1}Z+b_1$ و $Z'=e^{i\theta_2}Z+b_2$

ومنه فإن الكتابة المركبة لـ $r_2 o r_1$ هي $Z'=e^{i(\theta_2+\theta_1)}Z+e^{i\theta_2}b_1+b_2$

إذن $r_2 o r_1$ له كتابة مركبة من الشكل $Z'=aZ+b$ مع $|a|=1$

إذن هو إما دوران أو إنسحاب .

- إذا كان $\theta_1+\theta_2=2k\pi$ فإن $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=1$ وبالتالي $Z'=Z+e^{i\theta_2}b_1+b_2$

إذن $r_2 o r_1$ إنسحاب

- إذا كان $\theta_1+\theta_2\neq 2k\pi$ فإن $r_2 o r_1$ دوران زاويته $\theta_1+\theta_2$

مركب دوران و إنسحاب

مبرهنة

إذا كان t إنسحابا و r دوران زاويته θ حيث $\theta\neq 2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ فإن tor و rot هما دورانين زاوية كل منهما θ .

الإثبات

في المستوي الموجه تكون الكتابة المركبة لـ r و t هي على التوالي $Z'=e^{i\theta}Z+b_1$ و $Z'=Z+b_2$

ومنه الكتابة المركبة لـ rot هي $Z'=e^{i\theta}Z+b_1+e^{i\theta}b_2$

بما أن $e^{i\theta}Z\neq 1$ فإن rot دوران زاويته θ

بنفس الكيفية نبين أن tor هو دوران زاويته θ .

مركز الدوران الذي يحول (A,B) إلى (A',B')

إذا كان r دوران مركزه النقطة I يحول A إلى A' و B إلى B' فإن ،

$IA=IA'$ .....(1) و $IB=IB'$ .....(2)

من (1) نستنتج أن I تنتمي إلى محور $[AA']$ ومن (2) نستنتج أن I تنتمي إلى محور $[BB']$

إذن I تنتمي إلى تقاطع محوري $[AA']$ و $[BB']$

نتيجة

- إذا كان $r_2 o r_1$ دوران فإن لتعيين مركزه نبحث عن صورتين لنقطتين مختارتين بالدوران $r_2 o r_1$ ونتبع نفس الخطوات السابقة.
- إذا كان $r_2 o r_1$ إنسحابا فإنه لتعيين شعاعه نبحث عن A' صورة نقطة مختارة A وعندئذ $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}$

تمرين تدريبي

$ABCD$ مربع مركزه النقطة O بحيث $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}$ ، عين طبيعة التحويلات التالية :

أ) $f=r(B,-\frac{\pi}{2})\,o\,r(A,\frac{\pi}{2})$ ، ب) $g=t_{\overrightarrow{AB}}\,o\,r(A,\frac{\pi}{2})$

جـ) $h=S_O\,o\,r(A,\frac{\pi}{2})$ حيث S_O تناظر مركزي مركزه النقطة O

✓ الحل

أ) بما أن $-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=0$ فإن f إنسحاب.

صورة A بالدوران $r(A,\frac{\pi}{2})$ هي النقطة A وصورة A بالدوران $r(B,-\frac{\pi}{2})$ هي C

إذن شعاع الإنسحاب هو $\overrightarrow{AC}$ وعليه $f=t_{\overrightarrow{AC}}$

ب) g هو دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة I .

$g(A)=t_{\overrightarrow{AB}}\,o\,r(A,\frac{\pi}{2})(A)=B$

$g(B)=t_{\overrightarrow{AB}}\,o\,r(A,\frac{\pi}{2})(B)=C$

إذن I تنتمي إلى تقاطع محوري $[AB]$ و $[BC]$ اي I منطبقة على O

وعليه $g=r(O,\frac{\pi}{2})$

جـ) S_O تناظر مركزي مركزه النقطة O فهو إذن دوران مركزه O وزاويته π

إذن $h=r(O,\pi)\,o\,r(A,\frac{\pi}{2})$

بما أن $\pi+\frac{\pi}{2}\neq 2k\pi$ فإن h دوران زاويته $3\frac{\pi}{2}$.

صورة B بالدوران $r(A,\frac{\pi}{2})$ هي D وصورة D بالتناظر S_O هي B

إذن B صامدة وبالتالي مركز الدوران h هي B وعليه $h=r(B,3\frac{\pi}{2})$

8. مركب تحاكيات و إنسحابات

1-8 مركب تحاكيين مختلفي المركز

مبرهنة

h_1 تحاكي مركزه A ونسبته k_1 و h_2 تحاكي مركزه B ونسبته k_2 و $k_2 \neq 1$ إذن :

إذا كان $k_1 k_2 = 1$ فإن $h_2 o h_1$ إنسحاب شعاع توجيهه هو شعاع توجيه (AB)

إذا كان $k_1 k_2 \neq 1$ فإن $h_2 o h_1$ تحاكي نسبته $k_1 k_2$ ومركزه ينتمي إلى (AB)

الإثبات

نختار معلما متعامدا ومتجانسا مباشرا $(A, \vec{u}, \vec{v})$ بحيث محور الفواصل هو (AB) .

لتكن b لاحقة B (b عدد حقيقي غير معدوم)

الكتابة المركبة لـ h_1 هي إذن $Z' = k_1 Z = f_1(Z)$

والكتابة المركبة لـ h_2 هي $Z' = k_2(Z-b) + b = f_2(Z)$

ومنه الكتابة المركبة لـ $k_2 o k_1$ هي :

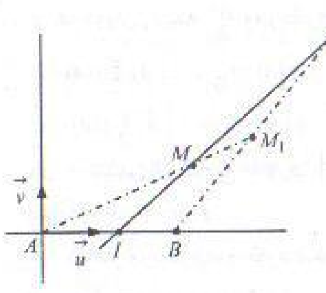
$$Z' = f_2(f_1(Z)) = k_2(k_1 Z - b) + b = k_2 k_1 Z + b(1-k_2)$$

- إذا كان $k_1 k_2 = 1$ فإن $h_2 o h_1$ إنسحاب شعاعه $\vec{w}$ لاحقته $b(1-k_2)$

وبما أن b و k_2 أعداد حقيقية غير معدومة فإن $\vec{w}$ مرتبط خطيا مع $\vec{u}$ وبالتالي فهو شعاع توجيه لـ (AB)

- إذا كان $k_2 k_1 \neq 1$ فإن $h_2 o h_1$ تحاكي نسبته $k_2 k_1$ ومركزه النقطة الصامدة I ذات اللاحقة $\omega = \frac{b(1-k_2)}{1-k_1 k_2}$.

بما أن ω عدد حقيقي فإنها تقع على (AB)



- تعيين مركز التحاكي $h_2 o h_1$

إذا كان $h_2 o h_1$ تحاكيا فإن لإيجاد مركزه I نختار نقطة M لا تنتمي إلى (AB) ونعلم النقطة M_1 بحيث $M_1 = h_1(M)$ ثم النقطة M' بحيث $M' = h_2(M_1)$

عندئذ النقطة I هي تقاطع (AB) و (MM') .

هناك طريقة ثانية لتعيين المركز I بحيث نختار نقطة A أو B ونبحث عن صورتها بالتحاكي $h_2 o h_1$.

$h_2 o h_1(A) = h_2(A) = A'$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{IA'} = k_2 k_1 \overrightarrow{IA}$

ومنه نستنتج أن I هي مرجح الجملة $(A, k_2 . k_1), (A', -1)$

تمرين تدريبي

$ABCD$ مربع ، h_1 هو تحاكي مركزه D ونسبته $\frac{1}{2}$ ، h_2 تحاكي مركزه C ونسبته 3 . بين أن $h_2 o h_1$ تحاكي منشئا مركزه I

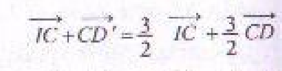
✓ الحل

بما أن $k_2 k_1 = \frac{3}{2} \neq 1$ فإن $h_2 o h_1$ تحاكي نسبته $\frac{3}{2}$ ومركزه النقطة I

لدينا $h_2 o h_1(D) = h_2(D) = D'$

$h_2(D) = D'$ تكافئ $\overrightarrow{CD'} = 3\,\overrightarrow{CD}$

ولدينا أيضا $\overrightarrow{ID'} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{ID}$



$$\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD'} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{IC} + \frac{3}{2}\,\overrightarrow{CD}$$

$$-\frac{1}{2}\,\overrightarrow{IC} = -3\,\overrightarrow{CD} + \frac{3}{2}\,\overrightarrow{CD}$$

$$-\frac{1}{2}\,\overrightarrow{IC} = -\frac{3}{2}\,\overrightarrow{CD}$$

ومنه $\overrightarrow{IC} = 3\,\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{CI} = -3\,\overrightarrow{CD}$

2-8 مركب تحاكي وإنسحاب

مبرهنة

h تحاكي مركزه A ونسبته k بحيث $k \neq 1$ و t إنسحاب شعاعه $\vec{u}$ حيث $\vec{u} \neq 0$

إذن $t o h$ و $h o t$ هما تحاكيان نسبتهما k ومركزيهما متواجدان على المستقيم $(A, \vec{u})$

الإثبات

لنختار معلما متعامدا ومتجانسا مباشرا مركزه A بحيث يكون محور الفواصل محمولا على المستقيم $(A, \vec{u})$

لاحقة الشعاع $\vec{u}$ هي عدد حقيقي a

الكتابة المركبة لـ h هي $Z' = f_1(Z) = kZ$ و الكتابة المركبة لـ t هي $Z' = f_2(Z) = Z + a$

إذن الكتابة المركبة لـ $t o h$ هي $Z = f_2(f_1(Z)) = kZ + a$

بما أن $k \neq 1$ فإن $t o h$ هو تحاكي نسبته k ومركزه النقطة I لاحقتها $\omega = \frac{a}{1-k}$

لكن ω عدد حقيقي غير معدوم إذن I موجودة على المستقيم $(A, \vec{u})$

وبنفس الكيفية نبين أن hot هو تحاكي نسبته k ومركزه I موجودة على $(A,\vec{u})$

ـ تعيين مركز hot ؛

لإيجاد المركز I نختار نقطة M غير موجودة على $(A,\vec{u})$ ونعلم النقطة M_1 بحيث ؛ $M_1 = h(M)$ ونعلم النقطة M' بحيث $M' = t(M_1)$

النقطة I هي تقاطع $(A,\vec{u})$ مع (MM').

هناك طريقة ثانية لتعيين I ؛

نختار نقطة A ونبحث عن صورتها A' بالتركيب toh

I هي مرجح الجملة $(A,-k)$ ، $(A',1)$ حيث $\vec{AA'} = \vec{u}$

تمرين تدريبي

$ABCD$ مربع ، h تحاكي مركزه A ونسبته $\frac{3}{2}$ و t انسحاب شعاعه $\vec{AB}$ ما هي طبيعة التحويل toh معينا عناصره المميزة ثم أنشئ صورة $ABCD$ بهذا التحويل.

الحل

بما أن $k \neq 1$ و $A \neq B$ فإن toh تحاكي نسبته $k = \frac{3}{2}$ ومركزه النقطة I تنتمي إلى $(A,\vec{u})$ أي تنتمي إلى (AB)

نختار النقطة A ونبحث عن صورتها A' بالتحاكي toh

$toh(A) = t(A) = B$ ومنه نستنتج $\vec{IB} = \frac{3}{2}\vec{IA}$

$\vec{IB} = \frac{3}{2}\vec{IA}$ يكافئ $\vec{IA} + \vec{AB} = \frac{3}{2}\vec{IA}$ يكافئ $\vec{IA} = 2\vec{AB}$

$toh(A) = B$

$toh(B) = t(h(B)) = B'$

$h(B) = B_1$ يكافئ $\vec{AB_1} = \frac{3}{2}\vec{AB}$

ولدينا $\vec{B_1B'} = \vec{AB}$

إذن $\begin{cases} \vec{AB_1} = \frac{3}{2}\vec{AB} \\ \vec{B_1B'} = \vec{AB} \end{cases}$

لدينا $h(C) = C_1$ و $toh(C) = t(h(C)) = C'$

ومنه ينتج $\vec{AC_1} = \frac{3}{2}\vec{AC}$ و $\vec{C_1C'} = \vec{AB}$

لدينا $h(D) = D_1$ و $toh(D) = t(h(D)) = D'$

ومنه ينتج $\vec{AD_1} = \frac{3}{2}\vec{AD}$ و $\vec{D_1D'} = \vec{AB}$

9 . مركب تناظرين محوريين

مبرهنة

σ_1 تناظر محوري محوره (Δ_1) ، σ_2 تناظر محوري محوره (Δ_2) يختلف عن (Δ_1)

ـ إذا كان (Δ_1) يوازي (Δ_2) فإن $\sigma_2 o \sigma_1$ إنسحاب.

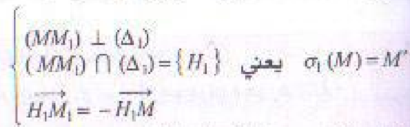
ـ إذا كان (Δ_1) و (Δ_2) متقاطعين فإن $\sigma_2 o \sigma_1$ دوران.

الإثبات

• حالة (Δ_1) يوازي (Δ_2) ؛

لتكن M نقطة كيفية صورتها M_1 بـ σ_1 ؛

$\sigma_1(M) = M'$ يعني $\begin{cases} (MM_1) \perp (\Delta_1) \\ (MM_1) \cap (\Delta_1) = \{H_1\} \\ \vec{H_1M_1} = -\vec{H_1M} \end{cases}$



ولتكن M' صورة M_1 بالتناظر σ_2 ؛

$\sigma_2(M_1) = M'$ تعني $\begin{cases} (M_1M') \perp (\Delta_2) \\ (M_1M') \cap (\Delta_2) = \{H_2\} \\ \vec{H_2M'} = -\vec{H_2M_1} \end{cases}$

$\vec{MM'} = \vec{MH_1} + \vec{H_1M_1} + \vec{M_1H_2} + \vec{H_2M'} = \vec{H_1M_1} + \vec{H_1M_1} + \vec{M_1H_2} + \vec{M_1H_2}$

$= 2(\vec{H_1M_1} + \vec{M_1H_2}) = 2\vec{H_1H_2}$

بما أن المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) متوازيان فإن البعد بينهما ثابت ويساوي H_1H_2

ومنه الشعاع $2\vec{H_1H_2}$ ثابت إذن $\sigma_2 o \sigma_1$ إنسحاب شعاعه $2\vec{H_1H_2}$

• حالة (Δ_1) يقطع (Δ_2) ؛

نضع $(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = \{O\}$

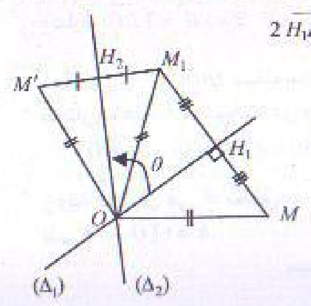
$\sigma_2 o \sigma_1(O) = \sigma_2(O) = O$

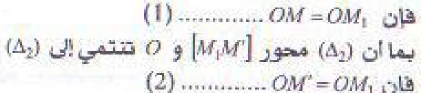
إذن O نقطة صامدة بالتحويل $\sigma_2 o \sigma_1$

$\sigma_2 o \sigma_1(M) = \sigma_2(M_1) = M'$

$\sigma_1(M) = M_1$ تعني أن (Δ_1) محور $[MM_1]$

$\sigma_2(M_1) = M'$ تعني أن (Δ_2) محور $[M_1M']$





بما أن (Δ_1) محور القطعة المستقيمة $[MM_1]$ و O تنتمي إلى (Δ_1)

فإن $OM = OM_1$ .... (1)

بما أن (Δ_2) محور $[M_1M']$ و O تنتمي إلى (Δ_2)

فإن $OM' = OM_1$ .... (2)

من (1) و (2) نجد $OM' = OM$

لدينا $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM'}) + 2k\pi$

$= (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OH_1}) + (\overrightarrow{OH_1}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OH_2}) + (\overrightarrow{OH_2}, \overrightarrow{OM'})$

$= 2(\overrightarrow{OH_1}, \overrightarrow{OM_1}) + 2(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OH_2}) + 2k\pi$

$= 2(\overrightarrow{OH_1}, \overrightarrow{OH_2}) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{R}$

بوضع $(\Delta_1, \Delta_2) = \theta_2$ يكون لدينا $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 2\theta + 2k\pi$

إذن التحويل $\sigma_2 o \sigma_1$ هو دوران مركزه النقطة O و زاويته 2θ

تمرين تدريبي

$ABCD$ مربع من المستوي الموجه مركزه النقطة O

1) عين طبيعة التحويل $h_1 = g_1 o f_1$ حيث f_1 تناظر محوري محوره (AB) و g_1 تناظر محوري محوره (CD)

2) عين $h_2 = g_2 o f_2$ حيث f_2 تناظر محوري محوره (AC) و g_2 تناظر محوري محوره (BD)

✔ الحل

1) بما أن (AB) يوازي (CD) فإن h_1 هو إنسحاب

نختار النقطة B ونبحث عن صورتها بالتحويل h_1

$h_1(B) = g_1 o f_1(B) = g_1(B) = B'$

حيث B' نظيرة B بالنسبة إلى C

وعليه $\vec{u} = \overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BC}$ إذن $h_1 = t_{2\overrightarrow{BC}}$

2) بما أن (AC) و (BD) متقاطعان في O فإن h_2 دوران مركزه النقطة O

نختار نقطة A و نبحث عن صورتها بالتحويل h_2

$h_2(A) = g_2(f_2(A)) = g_2(A) = C$

زاوية الدوران هي θ تحقق $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = -\pi$

إذن $h = r(O, -\pi)$

⑩- تفكيك دوران و إنسحاب إلى جداء تناظرين محوريين

1-10 تفكيك دوران

ليكن $r(O,\theta)$ دوران مركزه النقطة O وزاويته θ .

- إذا كان $\theta = 2k\pi$ فإن $r(O,0) = Id = \sigma_\Delta o \sigma_\Delta$ حيث Δ مستقيم كيفي

- إذا كانت $\theta \neq 2k\pi$ ، ليكن (Δ_1) مستقيم كيفي من المستوي يشمل النقطة O ،

وليكن (Δ_2) صورة (Δ_1) بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\theta}{2}$

وباستعمال مبرهنة الفقرة (9) نجد $\sigma_{\Delta_2} o \sigma_{\Delta_1} = r(O,\theta)$

وبما أن (Δ_1) كيفي فإن التفكيك ليس وحيدا.

$\frac{\theta}{2}$

(Δ_1) (Δ_2)

2-10 تفكيك إنسحاب

ليكن $t_{\vec{u}}$ إنسحاب شعاعه $\vec{u} \neq \vec{0}$ وليكن (Δ_1) مستقيما عموديا على $\vec{u}$

وليكن (Δ_2) صورة (Δ_1) بالإنسحاب الذي شعاعه $\frac{1}{2}\vec{u}$

حسب المبرهنة الموجودة في الفقرة (9) فإن $\sigma_{\Delta_2} O \sigma_{\Delta_1} = t_{\vec{u}}$

$\frac{1}{2}\vec{u}$

(Δ_1) (Δ_2)

تمرين تدريبي

في المستوي الموجه $ABCD$ مربع قطراه $[AC]$ ، $[BD]$ حيث $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

ليكن $r(A, \frac{\pi}{2})$ دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ و $\sigma_{(AC)}$ تناظر محوري محوره (AC)

1) نضع $h = \sigma_{(AC)} \ o \ r(A, \frac{\pi}{2})$:

أ) عين صورتي النقطتين A و B بالتحويل h .

ب) عين طبيعة التحويل h

2) عين صورة المربع $ABCD$ بالتحويل h

✔ الحل

1) أ) $h(A) = \sigma_{AC}(A) = A$ لأن $r(A, \frac{\pi}{2})(A) = A$ و A تنتمي إلى (AC)

$h(B) = \sigma_{AC}(D) = B$

ب) تعيين طبيعة التحويل h

$r(A, \frac{\pi}{2}) = \sigma_{(AC)} \ o \ \sigma_{(AB)}$

وعليه $h=\sigma_{(AC)}\ o\ (\sigma_{(AC)}\ o\ \sigma_{(AB)})=(\sigma_{(AC)}\ o\ \sigma_{(AC)})\ o\ \sigma_{(AB)}$

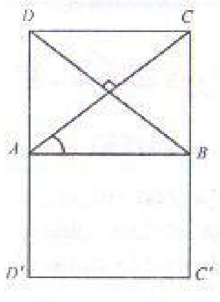
$=Id\ o\ \sigma_{(AB)}=\sigma_{(AB)}$

ومنه h هو تناظر محوري محوره (AB)

2) $h(A)=A$ و $h(B)=B$ و $h(C)=C'$ حيث B منتصف $[CC']$

$h(D)=D'$ حيث A منتصف $[DD']$

إذن صورة المربع $ABCD$ هو المربع $ABC'D'$



11 - تركيب تشابهين كيفيين

1-11 مركب تشابهين كيفيين

مبرهنة

تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه مباشر.

تركيب تشابهين غير مباشرين هو تشابه مباشر.

تركيب تشابه مباشر و آخر غير مباشر هو تشابه غير مباشر.

الإثبات

إذا كان S_1 و S_2 تشابهان نسبتيهما k_1 و k_2 فإن $S_2 o S_1$ هو تشابه نسبته k_2k_1

- إذا كان S_1 و S_2 تشابهان مباشرين يحفظان الزوايا الموجهة فإن $S_2 o S_1$ يحفظ الزوايا الموجهة إذن $S_2 o S_1$ هو تشابه مباشر.

إذا كان S_1 و S_2 تشابهان غير مباشرين فإن المركب $S_2 o S_1$ يحفظ الزوايا الموجهة إذن هو تشابه مباشر.

بنفس الطريقة نبين أن القسم الثالث من المبرهنة.

2-11 مركب تشابهين مباشرين لهما مركز

- المركب $S_2 o S_1$ تشابه مباشر S_1 نسبته k_1 وزاويته θ_1 وكتابته المركبة $Z'=k_1e^{i\theta_1}Z+b_1$

والتشابه المباشر S_2 نسبته k_2 وزاويته θ_2 وكتابته المركبة $Z'=k_2e^{i\theta_2}Z+b_2$

هو تشابه مباشر نسبته k_1k_2 وزاويته $(\theta_1+\theta_2)$ وكتابته المركبة

$Z'=k_1k_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}Z+b_1k_2e^{i\theta_2}+b_2$

- التحويل العكسي لتشابه مباشر S نسبته k و زاويته θ ومركزه I هو التشابه المباشر S^{-1} نسبته $\frac{1}{k}$ وزاويته $-\theta$ ومركزه I.

ملاحظة

كل تشابه غير مباشر S يكتب على الشكل $S=S_1 o \sigma$ حيث S_1 تشابه مباشر و σ تناظر محوري.

تمرين تدريبي

ABC مثلث من المستوي الموجه. S_A تشابه مباشر مركزه A بحيث $S_A(B)=C$

S_B تشابه مباشر مركزه B بحيث $S_B(C)=A$

S_C تشابه مباشر مركزه C بحيث $S_C(A)=B$

نضع $\sigma=S_C o S_B o S_A$ ،

1) حدد $\sigma(B)$

2) استنتج أن σ هو تناظر مركزي مركزه B.

✓ الحل

1) $\sigma(B)=S_C o S_B o_A(B)=S_C o S_B(C)=S_C(A)=B$

إذن B صامدة بالتحويل σ

2) S_A تشابه مباشر نسبته $\frac{AC}{AB}$ وزاويته $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$

S_B تشابه مباشر نسبته $\frac{BA}{BC}$ زاويته $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$

S_C تشابه مباشر نسبته $\frac{CB}{CA}$ وزاويته $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$

$\sigma=S_C o S_B o S_A=\ S_C o(S_B o S_A)$

$S_B o S_A$ هو تشابه نسبته $\frac{AC}{AB}\times\frac{BA}{BC}$ اي $\frac{AC}{BC}$ وزاويته $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$

σ هو تشابه نسبته $\frac{AC}{BC}\times\frac{CB}{CA}$ اي 1 وزاويته

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\pi$

إذن σ تقايس وبما أن هذا التقايس له نقطة صامدة B

فإن σ هو دوران مركزه B وزاويته π (تناظر مركزي مركزه B).

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 • تعيين الكتابة المركبة لتحويل عكسي

T تحويل في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M(x,y)$ النقطة $M'(x',y')$
بحيث $x'=x-2y+1$ و $y'=2x+y-1$
1) بين أن الكتابة المركبة لـ T هي $Z'=(1+2i)Z+1-i$
2) بين أن النقطة $I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل T.
3) بين أن الكتابة المركبة لـ T^{-1} هي $Z'=\frac{1}{5}(1-2i)Z+\frac{1}{5}(1+3i)$

✓ الحل

1) $Z'=x'+iy'=(x-2y+1)+i(2x+y-1)=(x+iy)+2i^2y+2ix+1-i$
$=Z+2i(x+iy)+1-i=Z+2iZ+1-i=(2i+1)Z+1-i$

2) I صامدة بـ T يعني $T(I)=I$

$T(I)=I$ تعني $Z=(2i+1)Z+1-i$ ومنه نجد $Z=\frac{1-i}{1-(2i+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

إذن $I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل T.

3) $T(M)=M'$ تكافئ $T^{-1}(M')=M$

$T(M)=M'$ تكافئ $Z'=(1+2i)Z+1-i$ تكافئ $Z=\frac{1}{5}(1-2i)Z'+\frac{1}{5}(1+3i)$

إذن الكتابة المركبة لـ T^{-1} هي $Z'=\frac{1}{5}(1-2i)Z+\frac{1}{5}(1+3i)$

تطبيق 2 دراسة طبيعة مركب دورانين

ليكن r_1 و r_2 دورانين مركزهما O وزاويتيهما $\frac{\pi}{2}$ و θ على الترتيب.
θ عدد حقيقي، عين العدد الحقيقي θ بحيث :
أ) $r_2 o r_1$ تطبيق حيادي Id.
ب) $r_2 o r_1$ تناظر مركزي مركزه النقطة O.

✓ الحل

أ) لكي يكون $r_2 o r_1$ تطبيق حيادي يجب أن يكون $\theta+\frac{\pi}{3}=2k\pi$ لأن $r_2 o r_1(O)=0$

ومنه $\theta=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

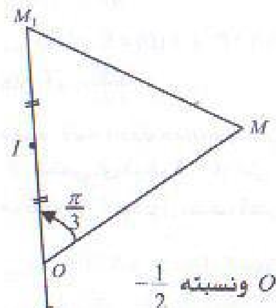
ب) حتى يكون $r_2 o r_1$ تناظرا مركزيا يجب أن يكون $\theta+\frac{\pi}{3}=\pi+2k\pi$

ومنه $\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

تطبيق 3 التعرف على طبيعة تحويل

O نقطة معطاة من المستوي، نرفق بكل نقطة M مختلفة عن O النقطة M_1
بحيث المثلث OMM_1 متقايس الأضلاع مباشر
لتكن M' نظيرة I منتصف القطعة $[OM_1]$ بالنسبة إلى O.
1-أ) عين التحويل الذي يحول M إلى M_1
ب) عين التحويل الذي يحول M_1 إلى M'
2) بين أن التحويل f الذي يرفق النقطة M بالنقطة M' هو تشابه مباشر.

✓ الحل



1) أ) بما أن $OM=OM_1$ و $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_1})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

فإن التحويل الذي يحول M إلى M_1 هو :

دوران r مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

ب) بما أن M' نظيرة I بالنسبة إلى O

فإن $\overrightarrow{OM'}=-\overrightarrow{OI}$ إذن $\overrightarrow{OM'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OM_1}$

ومنه M' صورة M_1 بالتحاكي h الذي مركزه النقطة O ونسبته $-\frac{1}{2}$

2) $M \xrightarrow{r(O,\frac{\pi}{3})} M_1 \xrightarrow{h(O,-\frac{1}{2})} M'$ ، (S : $M \to M'$)

$S=h(O,-\frac{1}{2})\ o\ r(O,\frac{\pi}{3})=S_1(O,\frac{1}{2},\pi)\ o\ S_2(O,1,\frac{\pi}{3})$

إذن S تشابه مباشر مركزه النقطة O ونسبته $\frac{1}{2}\times 1$ أي $\frac{1}{2}$ وزاويته $\pi+\frac{\pi}{3}$ أي $\frac{4\pi}{3}$

تطبيق 4 — صورة دائرة بتشابه مباشر

المستوي الموجه مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. لتكن النقط ، $A(1,-1)$ ، $B(2,-3)$ ، $C(2,-1)$ وليكن S تشابها مباشرا بحيث :
$S(O)=C$ و $S(A)=B$

1) ا) ما هي نسبة التشابه المباشر S ؟
ب) لتكن D نقطة معرفة بإحداثيتيها $(0,1)$ ونضع $S(D)=E$ ،
- بين أن $CE=\sqrt{2}$
- ثم استنتج أن E تنتمي إلى الدائرة (C_1) يطلب تعيينها ثم ارسمها.
جـ) - بين أن $BE=\sqrt{10}$
- ثم استنتج أن E تنتمي إلى دائرة (C_2) يطلب تحديدها ورسمها.

2) استنتج من الأسئلة السابقة أن إحداثيتي E هي $(1,0)$ أو $(3,0)$.

✓ الحل

1) ا) بما أن $S(O)=C$ و $S(A)=B$
فإن نسبة التشابه هي $k=\frac{BC}{OA}$
لكن $BC=2$ و $OA=\sqrt{2}$
إذن $k=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

ب) بما أن $S(D)=E$ و $S(O)=C$
فإن $\frac{CE}{OD}=\sqrt{2}$
ومنه $CE=\sqrt{2}\,OD=\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$
E تنتمي إلى الدائرة (C_1) التي
مركزها C وطول نصف قطرها $\sqrt{2}$

جـ) $S(A)=B$ و $S(D)=E$ ومنه ينتج $\frac{BE}{AD}=\sqrt{2}$
ومنه $BE=\sqrt{2}\,AD$ لكن $AD=\sqrt{5}$ إذن $BE=\sqrt{10}$
بما أن $BE=\sqrt{10}$ فإن E تنتمي إلى الدائرة التي مركزها B وطول نصف قطرها $\sqrt{10}$

2) من السؤال 1) E تنتمي إلى $(C_1)\cap(C_2)$
إذا كانت إحداثيتا E هي $(1,0)$ فإن $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{CB})\neq(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{CE})$ (مختلفين في الاتجاه).
ومنه إحداثيتا E هي $(3,0)$.

تطبيق 5 — تفكيك تحويل نقطي إلى مركب تحويلين

المستوي الموجه مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ ، و T تحويل نقطي كتابته المركبة $Z'=i\overline{Z}$

1) بين أن $T=rof$ حيث f تناظر محوري محوره محور الفواصل و r دوران مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$
2) هل تستطيع التأكيد أن $rof=for$ ؟
3) A نقطة لاحقتها $1+i$ ،
ا) ما هي لاحقة $T(A)$ ؟ ب) استنتج أن T هو تناظر يطلب تعيين محوره.

✓ الحل

1) الكتابة المركبة لـ f هي $Z'=\overline{Z}$ والكتابة المركبة لـ r هي $Z'=e^{i\frac{\pi}{2}}Z=i\,Z$

$$M \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{r} M' \quad (rof)$$

$Z_1=\overline{Z}$ و $Z'=i\,Z_1$ حيث Z_1 لاحقة M_1 و Z' لاحقة M' عندئذ ،
$Z'=i\,Z_1=i(\overline{Z})$ إذن $T=rof$

2) $$M \xrightarrow{r} M_2 \xrightarrow{f} M'' \quad (for)$$

$Z_2=i\,Z$ و $Z''=\overline{Z_2}$ ومنه $Z''=\overline{iZ}=-i\overline{Z}$ إذن $for\neq rof$

3) ا) لاحقة $T(A)$ هي $i\,\overline{Z_A}$
$i\,\overline{Z_A}=i(\overline{1+i})=i(1-i)=1+i$ ومنه A صامدة بالتحويل T
ب) بما أن T ليس حياديا وله نقطتان صامدتان A و O
فإن T تناظر محوري محوره المستقيم (OA) .

تطبيق 6 — تعيين العناصر المميزة لتشابه مباشر

S تشابه مباشر كتابته المركبة $Z'=(1+i)Z+2$ ، الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' لاحقتها Z' .

1) ما هي نسبة S ؟ B نقطة لاحقتها $2i$ ما هي لاحقة $S(B)$ ؟
2) ليكن Z_1 لاحقة $\overrightarrow{BM}$ و Z_2 لاحقة $\overrightarrow{MM'}$ بين أن $Z_2=i\,Z_1$ ، ثم استنتج أن المثلث BMM' قائم ومتساوي الساقين.

✓ الحل

1) $a=1+i$ و $b=2$ إذن نسبة التشابه المباشر S هي $|a|=\sqrt{2}$

لاحقة النقطة $S(B)$ هي $Z'_B=(1+i)(2i)+2=2i$

إذن B صامدة بالتحويل S.

2) لدينا $Z_1=Z-Z_B=Z-2i$ و $Z_2=Z'-Z=i(Z-2i)$ ومنه ينتج $Z_2=iZ_1$

بما أن $Z_2=iZ_1$ فإن $MM'=MB$ و $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{MM'})=\frac{\pi}{2}$

وبالتالي المثلث BMM' قائم في M ومتساوي الساقين.

تطبيق 7 التشابه المباشر والمثلثات المتشابهة

في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر، لتكن النقط:
A، B، C، A'، B' لواحقها على الترتيب i ، -1 ، $2i$ ، $5+i$ ، $1+i$
وليكن S التشابه المباشر بحيث $S(A)=A'$ و $S(B)=B'$

1) عين الكتابة المركبة لـ S.
2) عين لاحقة C' بحيث يكون المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهين في الاتجاه المباشر.

✓ الحل

1) الكتابة المركبة لـ S هي $Z'=aZ+b$

$S(A)=A'$ تكافئ $5+i=a(i)+b$ ...... (1)

$S(B)=B'$ تكافئ $1+i=a(-1)+b$ ...... (2)

بطرح (2) من (1) نجد $a=2(1-i)$ ثم نعوض a في (2) نجد $b=3-i$

إذن الكتابة المركبة لـ S هي $Z'=2(1-i)Z+3-i$

2) حتى يكون ABC و $A'B'C'$ متشابهين في الاتجاه المباشر يجب أن يكون $S(C)=C'$

$S(C)=C'$ تكافئ $Z_{C'}=2(1-i)(-2i)+3-i$ تكافئ $Z_{C'}=-1-5i$

تطبيق 8 تعيين العناصر المميزة لتشابهات مباشرة

ABC مثلث متقايس الأضلاع مباشر من المستوي الموجه ومركز ثقله النقطة G ولتكن النقطة I منتصف $[AB]$

عين نسبة وزاوية كل تشابه من التشابهات المباشرة التالية:

أ) S_1 مركزه النقطة B و $S_1(I)=C$.

ب) S_2 مركزه النقطة I و $S_2(A)=C$.

✓ الحل

أ) S_1 نسبته $\frac{BC}{BI}=2$ لأن $BC=2BI$

وزاويته θ_1 حيث $\theta_1=(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BC})=-\frac{\pi}{3}$

إذن $S_1(B,2,-\frac{\pi}{3})$

ب) S_2 نسبته $\frac{IC}{I}=\frac{\sqrt{3}\,IA}{IA}=\sqrt{3}$ وزاويته θ_2

حيث $\theta_2=(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC})=-\frac{\pi}{2}$ إذن $S_2(I,\sqrt{3},-\frac{\pi}{2})$

تطبيق 9 تعيين صور نقط بتشابه مباشر

في المستوي الموجه نعتبر المعين $ABCD$ الذي مركزه النقطة O بحيث:
$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{3}$ وليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C وبحيث $S(A)=B$

1) حدد نسبة وزاوية التشابه S.
2) بين أن صورة النقطة O هي منتصف $[BC]$
3) بين أن صورة النقطة D هي مركز ثقل المثلث BCD.

✓ الحل

1) نسبة التشابه S هي $k=\frac{BC}{AC}=\frac{BC}{\sqrt{3}\,BC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

وزاويته θ تحقق $\theta=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{6}$

2) بما أن صورة $[AC]$ هي $[BC]$ و O منتصف $[AC]$ فإن صورة النقطة O هي منتصف $[BC]$ (لأن التشابه المباشر يحفظ المرجح).

3) لتكن D' صورة D بالتشابه S إذن $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CD'})=\frac{\pi}{6}$

ومنه ينتج أن D' تنتمي إلى المستقيم (AC)

$S(C)=C$ و $S(D)=D'$ ومنه ينتج $CD'=\frac{CD}{\sqrt{3}}$

لدينا $\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\frac{CD'}{CD}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنه ينتج $\frac{CD'}{CD}\times\frac{BC}{AC}=\frac{1}{3}$ أي $CD'=\frac{1}{3}AC$

لكن $CO=\frac{1}{2}AC$ ومنه $CD'=\frac{2}{3}CO$ إذن D' هي مركز ثقل المثلث BCD.

تطبيق 10 تعيين صورة مستقيم ودائرة بتشابه مباشر

في المستوي الموجه المزود بمعلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$، الكتابة المركبة للتشابه المباشر S هي $Z'=(1-i)Z+2-i$

1) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S.

2) اوجد معادلة صورة كل من المستقيم D ذو المعادلة $x+y-2=0$ والدائرة (C) ذات المعادلة $(x+\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=9$ بالتشابه المباشر S

✓ الحل

1) لدينا $a=1-i$ و $b=2-i$

بما أن $|a|=\sqrt{2}$ و $arg(a)=-\frac{\pi}{4}$ فإن S نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{-\pi}{2}$ ومركزه I النقطة الصامدة بالتحويل S.

$S(I)=I$ تكافئ $Z=(1-i)Z+2-i$ تكافئ $Z=-1-2i$ ومنه $I(-1,-2)$

2) نبحث عن التحويل العكسي لـ S ؛

$S(M)=M'$ تكافئ $S^{-1}(M')=M$

$S(M)=M'$ يكافئ $Z'=(1-i)Z+2-i$ يكافئ $\begin{cases} x=\frac{x'-y'-3}{2} \\ y=\frac{x'+y'-1}{2} \end{cases}$

$M(x,y)$ تنتمي إلى (D) تكافئ $\frac{x'-y'-3}{2}+\frac{x'+y'-1}{2}-2=0$ تكافئ $x'=4$

إذن صورة (D) هي (D') معادلته $x=4$

$M(x,y)$ تنتمي إلى (C) يكافئ $x^2+y^2-9=0$ يكافئ $(\frac{x'-y'}{2})^2+(\frac{x'+y'}{2})^2=9$

وبالتبسيط نجد $x'^2+y'^2=18$

ومنه صورة (C) هي (C') مركزها $O(0,0)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{18}$

تطبيق 11 صورة متوازي اضلاع بتشابه مباشر

في المستوي الموجه نعتبر متوازي الأضلاع $ABCD$ بحيث $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{3}$

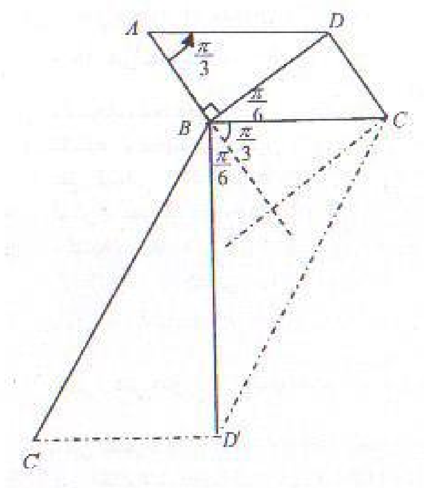
والمثلث ABD قائم في B.

وليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B بحيث $S(A)=C$.

1) عين العناصر المميزة لهذا التشابه

2) انشئ صورة $ABCD$ بالتشابه S.

✓ الحل





1) $\begin{cases} S(B)=B \\ S(A)=C \end{cases}$ ومنه ينتج $k=\frac{BC}{BA}$

لكن $BC=AD$ و $AD=\frac{AB}{\cos\frac{\pi}{3}}=2AB$

إذن $k=\frac{AD}{AB}=\frac{2AB}{AB}=2$

وزاويته θ تحقق $\theta=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

$\theta=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC})$

$=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=-\frac{2}{3}\pi$

2) لدينا $S(A)=C$ و $S(B)=B$

$S(D)=D'$ يكافئ $\begin{cases} BD'=2BD \\ (\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BD'})=-\frac{2\pi}{3} \end{cases}$

$S(C)=C'$ يكافئ $\begin{cases} BC'=2BC \\ (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC'})=-\frac{2\pi}{3} \end{cases}$

تطبيق 12 تحديد التشابه

في المستوي المزود بمعلم متعامد متجانس مباشر $(o,\vec{i},\vec{j})$، A نقطة لاحقتها a، نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M_1 ذات اللاحقة $Z_1=iZ$ والنقطة M_2 ذات اللاحقة Z_2 حيث $Z_2=Z+a$

1) A و M معطاة أنشئ M_1 و M_2 مبررا إنشائك.

2) ليكن T_1 التحويل الذي يرفق النقطة M بالنقطة M_1 و T_2 يرفق النقطة M بالنقطة M_2. بين أن النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل $T_1 o T_2$ هي صورة A بتشابه يطلب تعيينه.

3) ليكن S تحويلا يرفق بكل نقطة M النقطة M' بحيث $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$

أ) بين أن S هو تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.

ب) بين أن المركز ω للتشابه المباشر S هو صورة A بدوران يطلب تعيينه

✓ الحل

1) M_1 هي صورة M بدوران $r(O,\frac{\pi}{2})$

و M_2 هي صورة M

بانسحاب شعاعه $\vec{u}=\vec{OA}$ لاحقته a

2) الكتابة المركبة للتحويلين T_1 و T_2 هي:

على التوالي $Z'=iZ$ و $Z'=Z+a$

لتكن I صامدة بالتحويل T_1oT_2.

الكتابة المركبة لـ T_1oT_2 هي $Z'=iZ+ia$

$T_1oT_2(I)=I$ يكافئ $Z=iZ+ia$

ومنه $Z=(\frac{-1+i}{2})a$

إذن I هي صورة A بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) أ) من المساواة $\vec{OM'}=\vec{OM_1}+\vec{OM_2}$ نجد $Z'=Z_1+Z_2$ اي $Z'=(i+1)Z+a$

إذن الكتابة المركبة لـ S هي $Z'=(i+1)Z+a$

ومنه S هو تشابه مباشر نسبته $k=|i+1|=\sqrt{2}$ وزاويته $arg(i+1)=\frac{\pi}{4}$

ومركزه النقطة ω ذات اللاحقة $Z_\omega=ia$

ب) ω هي صورة A بدوران مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

تطبيق 13 — البرهان بواسطة التشابه

في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

لتكن النقط A، B، C، A'، B'، C' لواحقها على التوالي:

$-i$ ، 1 ، $1+i$ ، $2+i$ ، $3i$ ، $-2+3i$

بين أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان في الاتجاه المباشر.

✓ الحل

ليكن S تشابها مباشرا يحول A إلى A' و B إلى B' و C إلى C'

الكتابة المركبة لـ S هي $Z'=aZ+b$

$S(A)=A'$ تكافئ $2+i=a(i)+b$ ..... (1)

$S(B)=B'$ تكافئ $3i=a+b$ ..... (2)

بطرح (2) من (1) نجد $2-2i=a(-1-i)$ ومنه نجد $a=2i$

نعوض a في (2) نجد $b=i$

إذن الكتابة المركبة لـ S هي $Z'=2iZ+i$

السؤال المطروح هل $S(C)=C'$ ؟

لاحقة $S(C)$ هي $2i(1+i)+i$ اي $-2+3i$

إذن $S(C)=C'$ ومنه فإن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان في الاتجاه المباشر.

تطبيق 14 — البرهان باستعمال التشابه

A ، B ، C ثلاث نقاط على استقامة واحدة بهذا الترتيب بحيث $AB=6$ و $BC=4$

(C) هي الدائرة التي قطرها $[AC]$ و (d) هو محور القطعة $[BC]$ يقطع (C) في M و M' بحيث $(\vec{MA},\vec{MC})=\frac{\pi}{2}$، المستقيم $(M'B)$ يقطع (MA) في N.

وليكن S التشابه المباشر الذي مركزه N وبحيث $S(M)=B$

1) بين أن زاوية S هي $-\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\frac{3}{4}$.

2-1) ما هي صورة (d) بـ S ؟ ما هي صورة $(M'N)$ بـ S

ب) استنتج أن $S(M')=A$

3) ما هي صورة H تقاطع (MM') مع (BC) بالتحويل S ؟ ثم استنتج أن المستقيم (NH) مماس للدائرة التي قطرها $[AB]$

✓ الحل

1) $C\hat{M'}M=M\hat{A}C$.......(1) (محيطيتان تحصران نفس القوس)

$C\hat{M'}M=M\hat{M'}B$.......(2)

من (1) و (2) نجد $M\hat{A}C=M\hat{M'}B$......(3)

وبما أن $C\hat{B}M'=N\hat{B}A$ و $M\hat{M'}B+C\hat{B}M'=\frac{\pi}{2}$

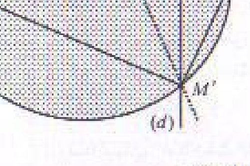
فإن $M\hat{A}C+N\hat{B}A=\frac{\pi}{2}$

وعليه يكون $B\hat{N}A=\frac{\pi}{2}$

زاوية التشابه المباشر S الذي مركزه N

هي $(\vec{MN},\vec{BN})=-\frac{\pi}{2}$

ونسبته $k=\frac{BN}{MN}$.



لدينا $OM^2=OH^2+HM^2$ حيث O مركز الدائرة المعطاة

ومنه $HM=4$

لدينا $\sin\alpha = \frac{BN}{AB} = \frac{BN}{6}$ ......(1).

$\sin\alpha = \frac{MN}{MM'} = \frac{MN}{2MH} = \frac{MN}{8}$ ......(2)

من (1) و (2) نجد $k = \frac{BN}{MN} = \frac{3}{4}$.

2) أ) ـ بما ان صورة المستقيم (d) هو مستقيم يعامده (زاوية التشابه هي $-\frac{\pi}{2}$) ويشمل النقطة B فإن صورة (d) هي (AC) .

ـ بما ان صورة $(M'N)$ هو مستقيم يعامده و يشمل N فإن صورة $(M'N)$ هو المستقيم (AN) .

ب) $S((MM'))=(AB)$ و $S((M'N))=(AM)$ و $(MM')\cap(M'N)=\{M'\}$ و $(AM)\cap(AB)=\{A\}$

إذن صورة M' هي A .

3) بما ان $S([MM'])=[AB]$ و H منتصف $[MM']$ فإن صورتها هي منتصف $[AB]$ (لأن التشابه يحفظ المرجح).

بما ان $S(H)=O'$ حيث O' منتصف $[AB]$ فإن $(\overrightarrow{NH},\overrightarrow{NO'})=-\frac{\pi}{2}$

وبما ان N تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AB]$ فإن (NH) مماس لها .

تطبيق 15 إثبات التعامد بواسطة التشابه

نزود المستوي بمعلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

$MNPQ$ رباعي في الاتجاه المباشر ،

المثلثات MRN ، NSP ، PTQ ، QUM قائمة ومتساوية الساقين خارجية بالنسبة إلى الرباعي $MNPQ$ وذات اتجاه مباشر كما في الشكل.

نريد إثبات أن $SU=TR$ وأن المستقيمين (SU) و (TR) متعامدان

لتكن m ، n ، p ، q لواحق النقط M ، N ، P ، Q على الترتيب.

1) f هو تشابه مباشر مركزه M بحيث $f(N)=R$

أ) عين نسبة وزاوية f .

ب) لتكن r لاحقة النقطة R بين ان $r=(\frac{1+i}{2})m+(\frac{1-i}{2})n$

نقبل انه لدينا كذلك $s=(\frac{1+i}{2})n+(\frac{1-i}{2})p$ حيث s لاحقة S

$t=(\frac{1+i}{2})p+(\frac{1-i}{2})q$ حيث t لاحقة T

$u=(\frac{1+i}{2})q+(\frac{1-i}{2})m$ حيث u لاحقة U .

2) بين أن $u-s=i(t-r)$ ، ثم استنتج أن $SU=TR$ و $(TR)\perp(SU)$

✓ الحل

1) أ) لدينا $f(N)=R$ و $f(M)=M$ ومنه نسبة التشابه المباشر f هي $k=\frac{RM}{NM}$

المثلث NRM قائم في R وحسب نظرية فيتاغورث لدينا $NM^2=NR^2+MR^2=2MR^2$

وبالتالي $NM=\sqrt{2}MR$

إذن $k=\frac{RM}{\sqrt{2}MR}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية التشابه f هي $\theta=(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MR})=-\frac{\pi}{4}$

ب) الكتابة المركبة لـ f هي $Z'=\frac{1}{2}(1-i)Z+b$

$f(M)=M$ تعني أن $m=\frac{1}{2}(1-i)m+b$ ......(1).

$f(N)=R$ تعني أن $r=\frac{1}{2}(1-i)n+b$ ......(2)

بطرح (2) من (1) نجد $m-r=\frac{1}{2}(1-i)m-\frac{1}{2}(1-i)n$ ومنه $r=(\frac{1+i}{2})m+(\frac{1-i}{2})n$

2) $u-s=(\frac{1+i}{2})(q-n)+(\frac{1-i}{2})(m-p)$ ......(3)

$t-r=(\frac{1+i}{2})(p-m)+(\frac{1-i}{2})(q-n)$

$i(t-r)=(\frac{1-i}{2})(m-p)+(\frac{1+i}{2})(q-n)$ ......(4).

من (3) و (4) نجد $u-s=i(t-r)$

بما أن $|u-s|=US$ و $|t-r|=RT$ ولكن $|u-s|=|t-r||i|$ إذن $RT=US$

وبما أن $\frac{u-s}{t-r}=i$ و $arg(i)=\frac{\pi}{2}$ فإن $(\overrightarrow{RT},\overrightarrow{SU})=\frac{\pi}{2}$ وعليه $(TR)\perp(SU)$

تطبيق 16 تعيين المحل الهندسي

في المستوي الموجه نعتبر دائرتين (C) و (C') مركزيهما على التوالي O و O' ونصف قطريهما R متماستين خارجيا عند A .

نرفق بكل نقطة M من (C) النقطة M' من (C') بحيث $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'})=\frac{\pi}{2}$

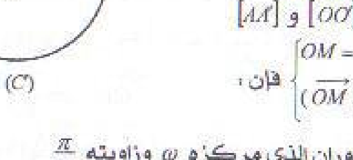
1) بين انه يوجد دوران يحول (C) إلى (C') زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه ω يطلب تعيينه هندسيا معينا صورة M بهذا الدوران.

2- أ) بين أن I منتصف $[MM']$ هي صورة M بالتشابه المباشر f مركزه ω معينا عناصره المميزة.

ب) استنتج الحل الهندسي لـ I لما M تمسح (C)

3) اعط صورة O بالتشابه f وقيسا للزاوية $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AI})$.

الحل



1) بما أن $A\in(C)$ فإن صورتها A' تنتمي إلى (C')

بما أن $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'})=\frac{\pi}{2}$ فإن $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O'A'})=\frac{\pi}{2}$

حيث A' صورة A بدوران زاويته $\frac{\pi}{2}$

إذن ω مركز هذا الدوران

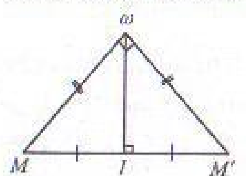
هي تقاطع محوري $[OO']$ و $[AA']$

وبما أن $\begin{cases} OM=O'M' \\ (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'})=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ فإن ،

M' صورة M بالدوران الذي مركزه ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$

حيث O' صورة O بهذا الدوران.

2) أ) بما أن المثلث $\omega MM'$ قائم في ω ومتساوي الساقين فإن (ωI) هو المنصف الزاوية $M\omega M'$



وعليه $(\overrightarrow{\omega M},\overrightarrow{\omega I})=\frac{\pi}{4}$

نسبة التشابه $k=\frac{\omega I}{\omega M}$

لدينا $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\omega I}{\omega M}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن يوجد تشابه مباشر مركزه النقطة ω ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ يحول M إلى I

ب) لما M تمسح دائرة (C) فإن I تمسح دائرة (C'') صورة (C) بالتشابه f.

حيث (C'') طول نصف قطرها $\frac{\sqrt{2}}{2}R$

3) لدينا $\frac{\omega A}{\omega O}=\frac{\omega A}{\sqrt{2}\,\omega A}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.......(1) و $(\overrightarrow{\omega O},\overrightarrow{\omega A})=\frac{\pi}{4}$.......(2)

من (1) و (2) نستنتج أن A هي صورة O بالتشابه المباشر f.

بما أن $f(O)=A$ و $f(M)=I$ فإن $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AI})=\frac{\pi}{4}$.

تطبيق 17 تعيين المحل الهندسي

$(O,\vec{u},\vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي الموجه.

M نقطة تمسح دائرة (C) معادلتها $x^2+y^2-4x=0$.

ننشئ المثلث MOM' القائم في O والمتساوي الساقين بحيث $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}$

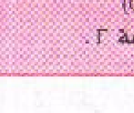
ولتكن I منتصف $[MM']$

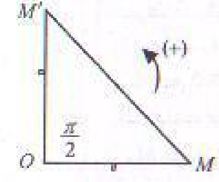
1) عين معادلة المجموعة (C') مجموعة النقط M' لما M تمسح (C)

ومجموعة النقط Γ مجموعة النقط I لما M يمسح (C)

2) بين أن نقط تقاطع (C) و (C') هي نقط من المجموعة Γ.

الحل





1) - بما أن MOM' مثلث قائم وتساوي الساقين فإن :

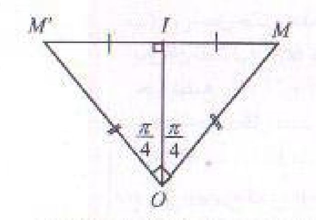
M' صورة M بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

وبما أن M تمسح الدائرة (C) ذات المركز A فإن :

M' تمسح (C') صورة (C) بالدوران $r(O,\frac{\pi}{2})$ حيث أن

مركزها هو A' صورة A بالدوران $r(O,\frac{\pi}{2})$.

ونصف قطرها 2.



لدينا $(\vec{OA},\vec{OA'})=\frac{\pi}{2}$

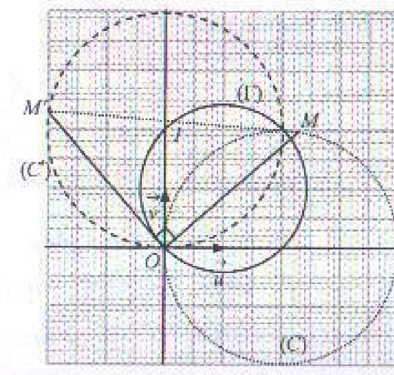
لتكن $Z_{A'}$ لاحقة A' صورة A ذات اللاحقة Z_A

لدينا $Z_{A'}=iZ_A=2i$ ومنه $A'(0,2)$

إذن $(C'): x^2+(y-2)^2=4$

- النقطة I صورة M بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته :

$$k=\frac{OI}{OM}=\frac{OI}{\sqrt{2}OI}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$



بما أن M تمسح (C) فإن I تمسح الدائرة Γ

صورة (C) بالتشابه المباشر $S(O,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4})$

وبحيث نصف قطرها $2\frac{\sqrt{2}}{2}$

اي $\sqrt{2}$ ومركزها A'' صورة A بـ S.

$$Z_{A'} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} Z_A = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1+i$$

إذن $(\Gamma):(x-1)^2+(y-1)^2=2$

2) نقط تقاطع (C) و (C') إحداثياتها $B\ (2,2)$ ، $O(0,0)$ وهذه النقط تنتمي إلى Γ .

تطبيق 18 المتتاليات و التشابه

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

S تشابه مباشر كتابته المركبة $Z' = \frac{1}{2} i Z + \frac{1-3i}{2}$

1) عين العناصر المميزة لـ S (المركز ω والزاوية θ والنسبة k)

2) لتكن M_0 نقطة لاحقتها $1+4\sqrt{3}+3i$ ومن أجل كل عدد طبيعي n نعرف متتالية النقط M_{n+1} بالكيفية التالية : $M_{n+1}=S(M_n)$

أ) احسب ωM_n بدلالة n

ب) علم النقطة M_0 ثم النقط M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4

جـ) ابتداء من أي رتبة n_0 يكون لدينا من أجل كل $n \geq n_0$ ، M_n تنتمي إلى قرص مركزه ω ونصف قطره $r = 0{,}05$

3 - أ) احسب M_0M_1 .

ب) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $d_n = M_n M_{n+1}$

بين أن المتتالية (d_n) هندسية ثم عين حدها الأول وأساسها.

جـ) نضع $L_n = d_0 + d_1 + ... + d_n$ ، احسب L_n بدلالة n ثم استنتج نهاية (L_n).

4) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نسمي G_n مرجح الجملة $(M_0, 1)$ ، ..... ، $(M_n, 1)$

أ) بين أنه من أجل $n > 0$ يكون $\omega G_n < \frac{16}{n+1}$

ب) استنتج الوضعية النهائية للنقطة G_n لما n يؤول إلى $(+\infty)$.

✓ الحل

1) S تشابه مباشر نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة ω ذات اللاحقة $Z_\omega = \dfrac{\frac{1-3i}{2}}{1-\frac{1}{2}i}$

ومنه $Z_\omega = 1-i$

2) أ) $M_{n+1} = S(M_n)$ يكافئ $Z_{n+1} = \frac{1}{2} i Z_n + \frac{1-3i}{2}$

يكافئ $Z_{n+1} - (1-i) = \frac{1}{2} i (Z_n - (1-i))$

ومنه ينتج $\omega M_{n+1} = \frac{1}{2} \omega M_n$

ومنه (ωM_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\omega M_0 = 8$

إذن $\omega M_n = 8 \times (\frac{1}{2})^n$

جـ) M_n تنتمي إلى قرص مركزه ω ونصف قطره $0{,}05$ معناه $\omega M_n \leq 0{,}05$

$\omega M_n \leq 0{,}05$ يكافئ $8(\frac{1}{2})^n \leq \frac{5}{100}$ يكافئ $n \geq 7{,}34$

ومنه قيمة n_0 المطلوبة هي 8 .

3) أ) لدينا $M_1M_0^2 = \omega M_0^2 + \omega M_1^2 = \omega M_0^2 + \frac{1}{4} \omega M_0^2$ ومنه $M_0M_1^2 = \frac{5}{4} \omega M_0^2$

إذن $M_1M_0 = \frac{\sqrt{5}}{2} \omega M_0 = \frac{\sqrt{5}}{2} \times 8 = 4\sqrt{5}$

ب) $d_n = M_n M_{n+1}$

$$M_{n+1}M_n^2 = \omega M_n^2 + \omega M^2_{n+1} = \omega M_n^2 + \frac{1}{4} \omega M_n^2 = \frac{5}{4} \omega M_n^2$$

ومنه $M_{n+1}M_n = \frac{\sqrt{5}}{2} \omega M_n$

إذن $M_{n+1}M_n = \frac{\sqrt{5}}{2} \times 8 \times (\frac{1}{2})^n = 4\sqrt{5}(\frac{1}{2})^n$

وبالتالي d_n متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $4\sqrt{5}$

جـ) $$L_n = d_0 + d_1 + ... + d_n = d_0 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 8\sqrt{5}\,(1-(\frac{1}{2})^n)$$

$$\lim_{n \to +\infty} d_n = \lim_{n \to +\infty} 8\sqrt{5}\,(1-(\frac{1}{2})^n) = 8\sqrt{5}$$

4) أ) $\overrightarrow{G_nM_0} + \overrightarrow{G_nM_1} + ... + \overrightarrow{G_nM_n} = \vec{0}$

$$(\overrightarrow{G_n\omega} + \overrightarrow{\omega M_0}) + (\overrightarrow{G_n\omega} + \overrightarrow{\omega M_1}) + ... + (\overrightarrow{G_n\omega} + \overrightarrow{\omega M_n}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\omega G_n} = \frac{1}{n+1}\left[\overrightarrow{\omega M_0} + ... + \overrightarrow{\omega M_n}\right]$$

$$\left\|\overrightarrow{\omega G_n}\right\| \leq \frac{1}{n+1}\left[\left\|\overrightarrow{\omega M_0}\right\| + ... + \left\|\overrightarrow{\omega M_n}\right\|\right]$$

$$\leq \frac{8}{n+1}\left[(\frac{1}{2})^0 + ... + (\frac{1}{2})^n\right]$$

$$\leq \frac{16}{n+1}\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]$$

إذن $0 \leq \left\|\overrightarrow{\omega G_n}\right\| \leq \frac{16}{n+1} \leq \frac{16}{n+1}$

ب) بما أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{16}{n+1}=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left\|\overrightarrow{\omega G_n}\right\|=0$

ومنه الوضعية النهائية لـ G_n هي النقطة ω

تطبيق 19 التقايسات

$(O,\vec{u},\vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر.

نعتبر النقط D ، C ، B ، A لواحقها على التوالي 1 ، i ، -1 ، $-i$.

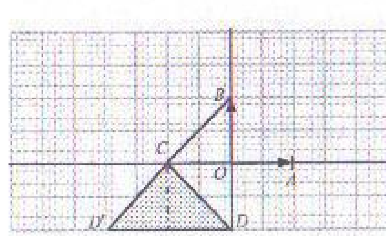
r_1 ، r_2 و r_3 دورانات مراكزها D ، B و C وزواياها $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{\pi}{2}$ على التوالي.

نضع $T=r_1 o r_2 o r_3$.

1) عين طبيعة T ثم استنتج عناصره المميزة.

2) عين طبيعة والعناصر المميزة للتحويل $r_3 o T$

✓ الحل



1) بما أن $\theta_1+\theta_2+\theta_3=2\pi$ فإن T انسحاب

ولتعيين شعاعه نختار نقطة

ونبحث عن صورتها :

$T(D)=r_1 o r_2 o r_3(D)$

$=r_1 o r_2 o (B)=r_1(B)=D'$

شعاع الانسحاب هو $\vec{w}=\overrightarrow{DD'}$ أي $\vec{w}=-2\vec{u}$

2) $r_3 o T$ دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$

$r_3 o T(D)=r_3(D')=D$ إذن $r_3 o T$ مركزه النقطة D.

تطبيق 20 تعيين العناصر المميزة لمركب دورانين

في المستوي الموجه. ABC مثلث متقايس الأضلاع بحيث $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$.

ولتكن I منتصف $[BC]$ و J نقطة بحيث B منتصف $[JC]$.

r_1 الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$، و r_2 دوران مركزه B وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

نضع $f=r_2 o r_1$ ولتكن A' و B' صورتي A و B بالتحويل f.

1) بين أن I منتصف $[AA']$ و B منتصف $[AB']$

2) بين أن f دوران ثم عين مركزه وزاويته.

✓ الحل

1) لدينا :

$f(A)=r_2 o r_1(A)=r_2(A)=A'$

$f(B)=r_2 o r_1(B)=r_2(C)=B'$

بما أن $BA=BA'$ فإن :

(BI) محور القطعة $[AA']$

و $[BC]$ محور $[AA']$

وبالتالي تقاطعهما هو I

إذن I تنتمي إلى $[AA']$ وبنفس الكيفية نبين أن B منتصف $[AB']$

2) $\theta_1+\theta_2=-\frac{\pi}{3}$ ومنه f دوران زاويته $-\frac{\pi}{3}$ ومركزه هو تقاطع محور $[AA']$ و $[BB']$

بما أن $A'BB'J$ معين فإن محور $[BB']$ هو $[A'J]$ ومحور $[AA']$ هو $[JC]$

إذن J هي مركز الدوران $r_2 o r_1$.

تطبيق 21 التحاكي و الإنسحاب

في المستوي الموجه نعتبر النقطتين A و B ولتكن E نقطة بحيث :

$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ $(AB=16cm)$

C نقطة مختلفة عن A بحيث $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{4}$

المستقيم الموازي لـ (BC) والمار بالنقطة E يقطع (AC) في F.

لتكن I و J منتصفي $[BC]$ و $[EF]$ على الترتيب

و D نقطة تقاطع (EC) و (BF)

نسمي h_A التحاكي الذي مركزه A بحيث $h_A(B)=E$

و h_D تحاكي الذي مركزه D بحيث $h_D(E)=C$

1-أ) عين $h_A(C)$ و $h_D(F)$

ب) استنتج العناصر المميزة لـ $h_D o h_A$ و $h_A o h_D$

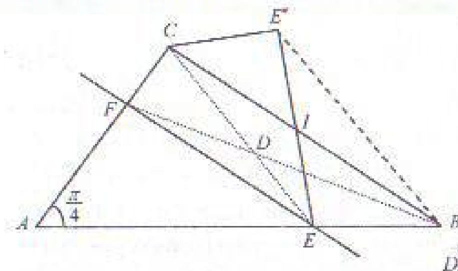
2) لتكن E' صورة E بـ h_A و E'' صورة E' بـ h_D.

أنشئ E' و E'' مبررا إنشائك.

3) بين أن الرباعي $BECE''$ متوازي أضلاع.

✓ الحل

1) أ) من المعطيات نستنتج أن التحاكي h_A نسبته $\frac{3}{4}$



$h_A(C)=F$ لأن $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{3}{4}$

أي $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

- لدينا $\frac{DF}{DB}=\frac{DE}{DC}=\frac{EF}{CB}=\frac{3}{4}$

ومنه $\frac{DF}{DB}=\frac{3}{4}$

وبالتالي $\overrightarrow{DF}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{DB}$ أي $\overrightarrow{DB}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{DF}$

إذن صورة F بالتحاكي h_D الذي نسبته $-\frac{4}{3}$ هي النقطة B.

ب) بما أن جداء النسبتين $\frac{3}{4}\times(-\frac{4}{3})=-1$ فإن:

$h_D o h_A$ هو تناظر مركزي.

$h_D o h_A(B)=h_D(E)=C$

وبالتالي مركز $h_D o h_A$ هو منتصف $[BC]$ أي النقطة I.

$h_A o h_D$ تناظر مركزي

$h_A o h_D(F)=h_A(B)=E$

ومنه مركز $h_A o h_D$ هو منتصف $[FE]$ أي النقطة J.

2) لدينا $h_A(E)=E'$ و $E''=h_D(E')$

و $\overrightarrow{AE'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ و $E''=h_D o h_A(E)$

إذن E'' نظيرة E بالنسبة إلى I

3) بما أن قطري الرباعي $BECE''$ متناصفان ومتقاطعان في I فإن $BECE''$ متوازي أضلاع.

تطبيق 22 التشابه المباشر وتفكيك الدوران

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط A، B، C و D لواحقها على الترتيب a، b، c و d

بحيث $a=1$ ، $b=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

1-أ) اعط الشكل الأسي لـ c والشكل الجبري لـ d.

ب) مثل النقط A، B، C و D، ثم برهن أن الرباعي $OACB$ معين.

2) برهن أن النقط A، D و C على استقامة واحدة.

3) عين الزاوية θ والنسبة k للتشابه المباشر S ذو المركز O الذي يحول A إلى C

4) نرمز بـ F و G إلى صورتي D و C بالتشابه المباشر S على التوالي

بين أن النقط F ، C و G على استقامة واحدة.

5) عين اللاحقة f للنقطة F.

6) نعتبر التحويل النقطي φ الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث $Z'=e^{-i\frac{2\pi}{3}}\bar{Z}+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

من أجل كل مستقيم (Δ) من المستوي نرمز بـ $\sigma_{(\Delta)}$ إلى التناظر المحوري ذو المحور (Δ)

أ) ليكن r التحويل الذي يرفق بكل نقطة M_1 ذات اللاحقة Z_1 النقطة M_1' ذات اللاحقة Z_1' بحيث $Z_1'=e^{-i\frac{2\pi}{3}}Z_1+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

عين طبيعة r ثم حدد عناصره المميزة.

ب) باستعمال الأعداد المركبة اعط قيسا للزاوية $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})$

ثم عين المستقيم (Δ) بحيث $r=\sigma_{(\Delta)}o\,\sigma_{(AO)}$

جـ) بين أن $\varphi=r\,o\,\sigma_{(AO)}$ ثم عين طبيعة φ.

الحل

1) أ) تعيين الشكل الأسي لـ C:

لدينا $C=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $|C|=\sqrt{3}$

$C=\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

ومنه $C=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

تعيين الشكل الجبري لـ d:

$d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos(-\frac{\pi}{6}))+i\sin(-\frac{\pi}{6}))$

ومنه $d=\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}$

ب) لدينا $OA=|a|=1$ و $OB=|b|=1$

$AC=|c-a|=\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$

$BC=|c-b|=\left|\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$

ومنه نستنتج أن $OA=OB=AC=BC$ إذن الرباعي $OACB$ عبارة عن معين.

2) إثبات أن النقط A، D و C على استقامة واحدة:

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AD}$ هي $d-a=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i-1=\frac{-1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هي $c-a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

و منه نستنتج $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AD}$

الشعاعان $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطان خطيا وعليه D ، A و C على استقامة واحدة

3) لدينا $S(O)=O$ و $S(A)=C$ ومنه نستنتج أن $k=\frac{OC}{OA}$ و $\theta=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$

لقد أثبتنا أن $OACB$ معين إذن قطريه منصفان لزواياه .

$k=\frac{OC}{OA}=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$ و $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{6}$

إذن التشابه المباشر S مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{6}$ ونسبته $\sqrt{3}$.

4) إثبات أن F ، C و G على استقامة واحدة :

لدينا $S(O)=O$ ، $S(D)=F$ و $S(A)=C$ و $S(C)=G$

ولدينا من السؤال 2) النقط D ، A و C على استقامة واحدة وبما أن التشابه المباشر يحفظ الاستقامية فإن F ، C و G على استقامة واحدة .

5) الكتابة المركبة المرفقة للتشابه S هي $Z'=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}Z$

ومنه $Z_F=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}Z_D$

$f=Z_F=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{3}{2}e^{0}=\frac{3}{2}$

6) أ) الكتابة المركبة المرفقة للتحويل r هي $Z_1'=e^{-\frac{2\pi}{3}i}Z_1+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

وهي من الشكل $Z'=aZ+b$ مع $|a|=1$

إذن r دوران زاويته $-\frac{2\pi}{3}$ ومركزه النقطة الوحيدة الصامدة بالتحويل r .

لاحقة المركز هي حل للمعادلة $Z=e^{-\frac{2\pi}{3}i}Z+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ وبعد حلها نجد $Z=1$

إذن r دوران مركزه النقطة A وزاويته $-\frac{2\pi}{3}$

ب) لدينا $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AO},\vec{i})+(\vec{i},\overrightarrow{AB})+2k\pi$

$(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})=arg\left(\frac{b-a}{-a}\right)+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$

$(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})=arg\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2k\pi$

$(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$

- تعيين المستقيم (Δ) :

$\sigma_{(AO)}\ O\ \sigma_{(AB)}$ هو دوران مركزه النقطة A وزاويته $2(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})$ وهي $-\frac{2\pi}{3}$

إذن $r=\sigma_{(AO)}\ o\ \sigma_{(AB)}$ ومنه $(\Delta)=(AB)$

جـ) التناظر المحوري الذي محوره (AO) كتابته المركبة المرفقة له هي $Z'=\overline{Z}$

ومنه الكتابة $r\ o\ \sigma_{(AO)}$ هي $Z'=e^{-\frac{2\pi}{3}i}\overline{Z}+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه التحويل $r\ o\ \sigma_{(AO)}$ هو التحويل φ .

من السؤال السابق لدينا $r=\sigma_{(AB)}\ o\ \sigma_{(AO)}$

إذن $\varphi=(\sigma_{(AB)}\ o\ \sigma_{(AO)})\ o\ \sigma_{(AO)}=\sigma_{(AB)}\ o\ (\sigma_{(AO)}\ o\ \sigma_{(AO)})=\sigma_{(AB)}\ o\ Id=\sigma_{(AB)}$

ومنه نستنتج أن φ هو التناظر المحوري الذي محوره (AB) .

تطبيق 23 التشابه المباشر والمتتاليات

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، m عدد مركب.
نعتبر التحويل النقطي T_m من المستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث $Z'=(m+i)Z+m-1-i$

I - 1) هل توجد قيمة لـ m بحيث يكون T_m انسحابا ؟

2) عين قيمة m بحيث T_m دوران، ثم عين عناصره المميزة.

II) في ما يلي نضع $m=1$

1-أ) احسب لاحقة النقطة Ω الصامدة بالتحويل T_1

ب) من أجل كل عدد مركب $Z\neq 1$ احسب $\frac{Z'-1}{Z-1}$ ، ثم فسر هندسيا طويلة و عمدة العدد المركب $\frac{Z'-1}{Z-1}$ ، وبرهن أن T_1 هو تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة .

جـ) برهن أنه من أجل كل عدد مركب Z لدينا $Z'-Z=i(Z-1)$
ثم استنتج أنه إذا كانت M مختلفة عن Ω فإن المثلث $\Omega MM'$ قائم عند M ومتساوي الساقين

2) نعرف في المستوي متتالية النقط (M_n) كما يلي :
$M_0=0$ و $M_1=T_1(M_0)$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ،
$M_n=T_1(M_{n-1})$
من أجل كل عدد طبيعي n نضع $d_n=\Omega M_n$:
برهن أن المتتالية (d_n) هندسية . هل هي متقاربة ؟

✓ الحل

I-1) نعلم أن الكتابة المركبة للإنسحاب الذي شعاعه $\vec{w}$ هي $Z'=Z+b$

T_m انسحاب إذا وفقط إذا كان $m+i=i$ ومنه $m=1-i$

2) T_m دوران إذا وفقط إذا كان $|m+i|=1$

$|m+i|=1$ يكافئ $\sqrt{m+1}=1$ يكافئ $m=0$

لدينا إذن $Z'=iZ-1-i$

مركز هذا الدوران هو النقطة Ω'

ذات اللاحقة Z حل للمعادلة $Z=iZ-1-i$ ......(I).

بعد حل المعادلة (I) نجد $Z=-i$

ومنه $\Omega'(0,-1)$

إذن T_0 دوران مركزه النقطة Ω' وزاويته $\frac{\pi}{2}$

II-1-أ) Ω صامدة بالتحويل T_1 إذا وفقط إذا كانت $Z_\Omega=(1+i)Z_\Omega-i$

ومنه ينتج $Z_\Omega=1$

إذن لاحقة النقطة Ω هي 1

ب) من أجل $Z\neq 1$ لدينا $\frac{Z'-1}{Z-1}=\frac{(1+i)Z-i-1}{Z-1}=1+i$

لدينا $\left|\frac{Z'-1}{Z-1}\right|=|1+i|=\sqrt{2}$

$$arg\left(\frac{Z'-1}{Z-1}\right)=arg(1+i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

لكن $\left|\frac{Z'-1}{Z-1}\right|=\frac{\Omega M'}{\Omega M}$ ومنه $\Omega M'=\sqrt{2}\,\Omega M$.

$$arg\left(\frac{Z'-1}{Z-1}\right)=(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})+2k\pi$$

ومنه $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

إذن التحويل T_1 يحول كل نقطة M مختلفة عن Ω إلى النقطة M' بحيث :

$\Omega M'=\sqrt{2}\,\Omega M$ و $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

ومنه نستنتج أن T_1 تشابه مباشر مركزه النقطة Ω و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$

جـ) لدينا $Z'-Z=(1+i)Z-i-Z=iZ-i=i(Z-1)$

إذا كانت M مختلفة عن Ω فإن $Z-1\neq 0$ و $Z'-Z\neq 0$

إذن $arg(Z'-Z)=arg(i)+arg(Z-1)+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$

$$arg(Z'-Z)-arg(Z-1)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$(\vec{u},\overrightarrow{MM'})-(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{MM'})=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

ومنه نستنتج ان المثلث $\Omega MM'$ قائم في M

وبما أن $Z'-Z=i(Z-1)$ فإن $|Z'-Z|=|Z-1|$ أي $MM'=\Omega M$

مما يدل على أن المثلث $\Omega MM'$ متساوي الساقين.

2) من السؤال 1- ب) لدينا $\Omega M'=\sqrt{2}\,\Omega M$ ومنه نستنتج من أجل كل عدد طبيعي n :

$\Omega M_{n+1}=\sqrt{2}\,\Omega M_n$ وعليه يكون $d_{n+1}=\sqrt{2}\,d_n$

ومنه نستنتج أن المتتالية (d_n) هندسية أساسها $\sqrt{2}$

لدينا $d_0=\Omega M_0=\Omega O=1$

ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا $d_n=d_0(\sqrt{2})^n=(\sqrt{2})^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} d_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{2})^n=+\infty$ ومنه نستنتج أن المتتالية (d_n) متباعدة.

تطبيق 24 دراسة تركيب التحاكيات والتشابه المباشر

في الشكل المجاور $ABCD$ مستطيل في الاتجاه المباشر.

$AEFB$ و $ADGH$ مربعان في الاتجاه المباشر.

1) نرمز بـ I إلى نقطة تقاطع المستقيمين (EG) و (FH)

ليكن h_1 التحاكي الذي مركزه I يحول G إلى E

و h_2 تحاكي مركزه I يحول F إلى H

أ) عين صورة المستقيم (CG) بالتحاكي h_1 ثم بالمركب $h_2 o h_1$

ب) عين صورة المستقيم (CF) بالمركب $h_1 o h_2$

جـ) تحقق أن $h_2 o h_1=h_1 o h_2$، ثم استنتج ان المستقيم (AC) يمر أيضا من النقطة I.

2) نريد إثبات أن المتوسط المرسوم من A في المثلث AEH هو ارتفاع في المثلث ABD

نرمز إلى منتصف $[EH]$ بالنقطة O.

أ) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{AO}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AH}$

ب) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{BD}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$

جـ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BD}$، ماذا تستنتج ؟

3) في هذا السؤال ندرس التشابه المباشر S الذي يحول A إلى B ويحول D إلى A

نضع $AB=1$ و $AD=k$ مع $k>0$

أ) عين زاوية و نسبة التشابه S.

ب) عين صورة المستقيم (BD) ثم صورة المستقيم (AO) بالتشابه S.

جـ) استنتج ان النقطة Ω نقطة القاطع (BD) و (AO) هي مركز التشابه S.

✓ **الحل**

1) أ) - تعيين صورة (CG) بالتحاكي h_1 :

نعلم أن صورة مستقيم بتحاكي هو مستقيم يوازيه.

إذن صورة المستقيم (CG) هو مستقيم يوازيه و يمر من النقطة E لأن $h_1(G)=E$

إذن صورة المستقيم (CG) هو (EF)

ـ تعين صورة (CG) بالتحويل $h_2 o h_1$:

لدينا $(h_2 o h_1)(CG)=h_2((EF))$

صورة المستقيم (EF) بالتحاكي h_2 هو الموازي لـ (EF) والمار بالنقطة H لأن $h_2(F)=H$

إذن $(h_2 o h_1)((CG))=h_2((EF))=(AH)$

ب) تعيين صورة (CF) بالتحويل $h_1 o h_2$:

صورة (CF) بالتحاكي h_2 هو الموازي لـ (CF) والمار من H لأن $h_2(F)=H$

إذن $h_2((CF))=(GH)$.

صورة (GH) بالتحاكي h_1 هو الموازي لـ (GH) و المار بالنقطة E لأن $h_1(G)=E$

إذن $h_1((GH))=(AE)$ و منه نستنتج $h_1 o h_2((CF))=(AE)$

ج) h_1 تحاكي نسبته k_1 و مركزه I و h_2 تحاكي مركزه I نسبته k_2

بما أن $(h_2 o h_1)(I)=(h_1 o h_2)(I)=I$ فإن $h_1 o h_2$ و $h_2 o h_1$ تحاكيين لهما نفس المركز I

ونفس النسبة k_1k_2 ومنه نستنتج أن $h_1 o h_2=h_2 o h_1$

ـ المستقيمان (CF) و (CG) يتقاطعان في النقطة C

وصورتيهما بالتحويل $(h_1 o h_2)$ أو $(h_2 o h_1)$ يتقاطعان في $(h_1 o h_2)(C)$

لكن من السؤال السابق عرفنا أن صورتاهما هما (AE) و (AH) اللذان يتقاطعان في A

ومنه نستنتج أن $h_1 o h_2(C)=A$

وبما أن مركز التحاكي $(h_1 o h_2)$ هو I فإن النقط I ، A ، C تقع على استقامة واحدة

وعليه نستنتج أن المستقيم (AC) يمر أيضا من I

2) ا) بما أن $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AO}$ فإن $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AH})$

ب) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

ج) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AH})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB})$$

ولكون $ADGH$ و $AEFB$ مربعان ينتج $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ و $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

لكن $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}=-AE\cdot AD$ و $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=-AH\cdot AB$

و $AE=AB$ و $AH=AD$

ومنه ينتج $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ومنه نستنتج أن $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

إذن المستقيمين (AO) و (BD) متعامدان

وبما أن (AO) هو المتوسط المار من A في المثلث AEH نستطيع القول أن المتوسط المار من A في المثلث AEH هو ارتفاع في المثلث ABD

3) ا) نعلم أن $S(A)=A$ و $S(D)=A$ ومنه نستنتج أن نسبة التشابه المباشر S هي $\frac{1}{k}=\frac{AB}{AD}$

وزاويته هي $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BA})$

لكن $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BA})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

إذن S تشابه مباشر زاويته $\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\frac{1}{k}$

ب) تعيين صورة المستقيمين (BD) و (AO) بالتشابه S :

نعلم أن $S(D)=A$ وزاويته التشابه هي $\frac{\pi}{2}$ وصورة (BD) هو مستقيم عمودي على (BD) و يمر من A إذن $S((BD))=(AO)$

ـ وبنفس الطريقة لدينا صورة المستقيم (AO) بالتشابه S هو المستقيم العمودي على (AO) والمار من B لأن $S(A)=(B)$ إذن $S((AO))=(BD)$

ج) تعيين مركز التشابه S :

S يحول (BD) إلى (AO) و يحول (AO) إلى (BD)

إذن S يحول النقطة Ω نقطة تقاطع (BD) و (AO) إلى نقطة تقاطع (BD) و (AO)

وهذا يعني أن Ω صامدة بالتحويل S ومنه نستنتج أن Ω مركز التشابه المباشر S

تطبيق 25 إثبات الإستقامية والتعامد باستعمال التشابه

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، تعتبر النقط ، A ، B ، C لواحقها على الترتيب $Z_A=3-i\sqrt{3}$ ، $Z_B=3+i\sqrt{3}$ ، $Z_C=2+\sqrt{3}+3i$

1) ا) علم النقط A ، B ، C ثم بين أن المثلث OAB متقايس الأضلاع مباشر.

ب) لتكن G مركز ثقل المثلث OAB عين اللاحقة Z_G للنقطة G

2) ليكن a و b عددين مركبين و R التحويل النقطي من المستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث $Z'=aZ+b$:

ا) عين a و b بحيث $R(O)=G$ و $R(A)=C$

ب) بين أن R دوران يطلب تعيين مركزه و زاويته

ج) بين أن المستقيمين (OA) و (GC) متعامدان

ماذا يمكن القول حول النقط G ، B و C ؟

د) أنشئ صورة المثلث OAB بالدوران R مبررا إنشائك

3) ليكن a' ، b' عددين مركبين و f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث $Z'=a'\overline{Z}+b'$

ا) عين a' و b' بحيث $f(O)=G$ و $f(A)=C$

ب) لتكن I منتصف $[OG]$.عين النقطة $f(I)$ هل f تناظر ؟

✓ الحل

1) لدينا $Z_B = \overline{Z}_A$ ومنه $|Z_B| = |\overline{Z}_A|$ إذن $OA = OB$

لدينا $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = arg(Z_B) - arg(Z_A) + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = arg(\frac{Z_B}{Z_A}) + 2k\pi$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = arg(\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}) + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

ومنه نستنتج ان المثلث OAB متقايس الأضلاع مباشر

ب) $Z_G = \frac{1}{3}(Z_O + Z_A + Z_B) = 2$

2) أ) حساب a ، b

لدينا $\begin{cases} Z_G = aZ_O + b \\ Z_C = aZ_A + b \end{cases}$ ومنه ينتج $\begin{cases} b = 2 \\ a = i \end{cases}$

إذن $Z' = iZ + 2$

ب) بما ان $|i| = 1$ و $arg(i) = \frac{\pi}{2}$

فإن R دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه لاحقتها Z حل للمعادلة $Z = iZ + 2$

وبعد حل هذه المعادلة نجد $Z = 1 + i$

إذن R دوران مركزه النقطة $\Omega(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

جـ) بما أن $R(O) = G$ و $R(A) = C$ فإن صورة (OA) بالدوران R هو المستقيم (GC)

لكن R دوران مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$ إذن (OA) و (GC) متعامدان

ـ المثلث OAB متقايس الأضلاع ومنه المتوسط (BG) منطبق على الارتفاع المرسوم من B

إذن (BG) عمودي على (OA)

نستنتج أن (BG) و (GC) منطبقان.

وعليه النقط G ، B ، و C على استقامة واحدة

د) صورة المثلث OAB بالدوران R هوالمثلث GCB' حيث $R(O) = G$ و $R(A) = C$

و $R(B) = B'$

وبما ان الدوران تقايس فإن المثلث GCB' هو أيضا متقايس الأضلاع

3) أ) $\begin{cases} Z_G = a'\overline{Z_O} + b' \\ Z_C = a'\overline{Z_A} + b' \end{cases}$ ومنه نجد $\begin{cases} b' = 2 \\ a' = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}$

ب) النقطة I ذات اللاحقة 1 :

$f(I)$ لاحقتها $Z' = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) + 2$

النقطتان I و $f(I)$ غير منطبقتين

بما ان $f(O) = G$ و منتصف $[OG]$ غير صامد بالتحويل f فإن التحويل f ليست تناظر .

تطبيق 26 البرهان باستعمال التشابه

ABC مثلث مباشر من مستوي موجه.

نرمز بـ I ، J ، K منتصفات القطع :

$[AB]$ ، $[BC]$ ، $[CA]$

على الترتيب.

ليكن α عدد حقيقي.

(d_1) صورة المستقيم $[AB]$

بالدوران الذي مركزه I وزاويته α .

(d_2) صورة المستقيم $[BC]$ بالدوران الذي مركزه J

وزاويته α .

(d_3) صورة المستقيم $[CA]$ بالدوران الذي مركزه K و زاويته α

A_1 هي نقطة تقاطع (d_1) و (d_3) و B_1 هي نقطة تقاطع (d_1) و (d_2)

و C_1 نقطة تقاطع (d_2) و (d_3) .

1) نسمي H نقطة التقاطع (BC) مع (d_1) .

بين أن المثلثين HIB و HB_1J متشابهان.

2) استنتج أن المثلثين ABC و $A_1B_1C_1$ متشابهان.

✓ الحل

1) بما أن الزاويتين المتقابلتين بالراس لهما نفس القيس

فإن $J\hat{H}B_1 = I\hat{H}B$ و $CJC_1 = H\hat{I}B = H\hat{J}B_1$

المثلثان HIB و HB_1J فيهما زاويتين لهما نفس القيس

إذن فهما متشابهان

2) لكون المثلثين HIB و HB_1J متشابهان

ينتج $J\hat{B}_1H = H\hat{B}I$ أي $C_1\hat{B}_1A_1 = CBA$.

لتكن M نقطة تقاطع (d_3) مع $[AB]$ ، بنفس الطريقة المستعملة في 1) نبرهن ان المثلثين

AKM و MA_1I متشابهان.

نستنتج أن $K\hat{A}M = M\hat{A}_1I$ أي $C\hat{A}B = C_1\hat{A}_1B_1$

المثلثان ABC و $A_1B_1C_1$ فيهما زاويتين لهما نفس القيس إذن فهما متشابهان .

تطبيق 27 تحديد عناصر التشابه

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$

I) نعتبر النقط $A(-4-6i)$ ، $B(14)$ ، $C(-4+6i)$ ، $A_1(3-7i)$
$B_1(9+5i)$ ، $C_1(-3-i)$

1) احسب لواحق المنتصفات I ، J ، K للقطع $[AB]$ و $[BC]$ و $[CA]$ على الترتيب وعلم هذه النقط.

2) بين أن النقط A_1 ، I ، B_1 على استقامة واحدة وتتقبل أن B_1 ، J ، C_1 من جهة و C_1 ، K ، A_1 من جهة أخرى على استقامة واحدة.

3) عين قيسا بالراديان للزاوية $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1})$ ونقبل أن $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KA_1}) = \frac{\pi}{4}$

و $(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JC_1}) = \frac{\pi}{4}$

4) ما هي صورة المستقيم (AB) بالدوران الذي مركزه I و زاويته $\frac{\pi}{4}$ ؟

II) نقبل انه يوجد تشابه مباشر S يحول النقط C ، B ، و A إلى C_1 ، B_1 ، A_1 على الترتيب.

1) برهن أن الكتابة المركبة المرفقة لـ S هي $Z' = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)Z + 2 - 2i$ حيث Z و Z' لاحقتي على الترتيب لنقطة وصورتها بالتشابه S.

2-ا) عين نسبته وزاوية التشابه S.

ب) عين لاحقة المركز Ω للتشابه S.

3) ماذا تمثل النقطة Ω بالنسبة إلى المثلث ABC ؟

✓ الحل

I-1) $Z_I = \frac{1}{2}(Z_A + Z_B) = 5 - 3i$ و $Z_J = \frac{1}{2}(Z_B + Z_C) = 5 + 3i$ و $Z_K = \frac{1}{2}(Z_C + Z_A) = -4$

2) لاحقة الشعاع $\overrightarrow{A_1B_1}$ هي $Z_{B_1} - Z_{A_1} = 6 + 12i$ ولاحقة الشعاع $\overrightarrow{A_1I}$ هي

$Z_I - Z_A = 2 + 4i$ ومنه نستنتج أن $\overrightarrow{A_1B_1} = 3\overrightarrow{A_1I}$

وهذا يعني أن النقط A_1 ، B_1 و I على استقامة واحدة.

3) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}) = (\vec{u}, \overrightarrow{IB_1}) - (\vec{u}, \overrightarrow{IB}) + 2k\pi$

$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}) = arg(\frac{Z_{B_1} - Z_I}{Z_B - Z_I}) + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}) = arg(\frac{2}{3}(1+i)) + 2k\pi$ ومنه $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

4) ليكن r الدوران الذي مركزه I وزاويته $\frac{\pi}{4}$ لدينا $r(I) = I$

بما أن I تنتمي إلى (AB) فإن صورة (AB) بالدوران r يمر بالنقطة $r(I)$ إذن يمر من I

صورة (AB) هو مستقيم يمر من I وشعاع توجيهه $\vec{u}$ يحقق $(\overrightarrow{IB}, \vec{u}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

من السؤال السابق لدينا $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

إذن (AB) هو المستقيم (IB_1) أو (A_1B_1)

II-1) لدينا $S(A) = A_1$ و $S(B) = B_1$ و $S(C) = C_1$

بما أن S تشابه مباشر فإن كتابته المركبة هي $Z' = aZ + b$ مع $a \in \mathbb{C}^*$ و $b \in \mathbb{C}$

بما أن $S(A) = A_1$ فإن $Z_{A_1} = aZ_A + b$ ...... (1)

ومن $S(B) = B_1$ نستنتج أن $Z_{B_1} = a Z_B + b$ .... (2)

ومن $S(C) = C_1$ نستنتج أن $Z_{C_1} = a Z_C + b$ ...... (3)

من (1) و (2) و (3) نجد $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ و $b = 2 - 2i$

إذن الكتابة المركبة للتشابه S هي $Z' = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) Z + 2 - 2i$

2) ا) نسبة التشابه S هي $\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right|$ وتساوي $\frac{\sqrt{2}}{2}$

وزاوية التشابه S هي $arg(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)$ وتساوي $\frac{\pi}{4}$

ب) اللاحقة ω للمركز Ω تحقق $\omega = \frac{1}{2}(1+i)\omega + 2 - 2i$

وبعد حل هذه المعادلة نجد $\omega = \frac{4-4i}{1-i} = 4$

إذن لاحقة Ω هي العدد المركب 4 .

3) نلاحظ أن $\Omega A = |Z_A - Z_\Omega| = 10$ و $\Omega B = |Z_B - Z_\Omega| = 10$ و $\Omega C = |Z_C - Z_\Omega| = 10$

إذن $\Omega A = \Omega B = \Omega C$ ومنه نستنتج أن Ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

تطبيق 28 التشابهات غير المباشرة

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

نعطي النقط A ، C ، D و Ω لواحقها على الترتيب $1+i$ ، 1 ، 3 ، و $2 + \frac{1}{2}i$

1) لتكن (γ) الدائرة ذات المركز Ω والمارة من A .

ا) بين أن (γ) تمر من C و D .

ب) بين أن القطعة $[AD]$ قطر للدائرة (γ).

جـ) علم النقط A ، C ، D و Ω و (γ) .نسمي B نقطة التقاطع الثانية لـ (γ) مع (OA)

د) بين أن النقطة O تقع خارج القطعة $[AB]$.

2) برهن هندسيا أن المثلثين OAD و OCB متشابهان وغير متقايسين.

3) ليكن S التشابه الذي يحول المثلث OCB إلى المثلث OAD .

بين أن S تشابه غير مباشر مختلف عن التناظر المحوري، ثم استنتج مركزه

4-أ) استنتج من السؤال 2) أن $OA \times OB = OC \times OD$

ب) استنتج لاحقة Z_B للنقطة B .

ج) عين الكتابة المركبة لـ S .

د) عين الطبيعة والعناصر المميزة لـ SOS .

✓ الحل

1) أ) $\Omega A = |Z_A - Z_\Omega| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $\Omega C = |Z_C - Z_\Omega| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $\Omega D = |Z_D - Z_\Omega| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

بما أن $\Omega A = \Omega C = \Omega D$ فإن الدائرة (γ) ذات المركز Ω تمر أيضا من C و D .

ب) النقطتان A و C لهما نفس الفاصلة وبالتالي تنتميان إلى المستقيم ذو المعادلة $x=1$.

المستقيم (CD) هو محور الفواصل إذن المثلث ACD قائم في C .

وبما أن الدائرة (γ) محيطة بالمثلث ABC فإنها تقبل الوتر $[AD]$ كقطر لها .

ج) لدينا $O\Omega = |Z_\Omega| = \frac{\sqrt{17}}{2}$ ومنه $O\Omega > \frac{\sqrt{5}}{2}$

إذن النقطة O موجودة خارج الدائرة (γ) ذات المركز Ω ونصف القطر $\frac{\sqrt{3}}{2}$

وبما أن (OA) يقطع (γ) في A و B فإن القطعة $[AB]$ هي وتر في الدائرة (γ) .

إذن القطعة $[AB]$ محتواة في القرص الذي حافته (γ)

ولكون O تقع خارج (γ) فإن O تقع خارج القطعة $[AB]$.

2) كون النقط O ، A ، B على استقامة واحدة و O ، C ، D على استقامة واحدة

نستنتج $A\hat{O}D = B\hat{O}C$

الزاويتان $A\hat{B}C$ و $A\hat{D}C$ داخل الدائرة (γ) وهما تحصران نفس القوس AC

إذن $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ أي $A\hat{B}C = A\hat{D}O$.

المثلثان OAD و OCB فيهما على التوالي زاويتين لهما نفس القيس إذن فهما متشابهان

بما أن $OC = 1$ و $OA = \sqrt{2}$ فإن $OA \neq OC$

ومنه نستنتج أن المثلثين OAD و OCB غير متقايسين.

3) ليكن S التشابه الذي يحول OCB إلى OAD

لدينا إذن $S(O) = O$ و $S(B) = D$ و $S(C) = A$

- التشابه S يحول $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$ إلى زاوية معاكسة لها $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$

إذن S تشابه غير مباشر

وبما أن S ليس تقايسا إذن لا يمكنه أن يكون تناظرا.

- بما أن $S(O) = O$ إذن O نقطة صامدة بالتشابه S

نفرض أن S يقبل نقطة صامدة F تختلف عن O .

نعلم من الدرس أن التشابه الذي له نقطتين صامدتين مختلفتين هو إما التطبيق المطابق أو التناظر لكن لدينا $S(C) = A$ إذن هو ليس التطبيق المطابق للمستوي.

ولقد بينا أن S ليس تناظرا إذن O هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل S .

4) أ) المثلثان OCB و OAD متشابهان و $S(O) = O$ و $S(B) = D$ و $S(C) = A$

وعليه $\frac{BC}{DA} = \frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD}$ ومنه نستنتج أن $OB \times OA = CO \times OD$

ب) $OB = |Z_B| = \frac{OC \times OD}{OA}$ ومنه $|Z_B| = \frac{1 \times 3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\arg Z_B = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

بما أن النقط O ، A ، B على استقامة واحدة بهذا الترتيب فإن :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \arg Z_A + 2k\pi$$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

ج) الكتابة المركبة لـ S هي $Z' = a\overline{Z} + b$ مع $a \in \mathbb{C}^*$ و $b \in \mathbb{C}$

بما أن $S(O) = O$ فإن $b = 0$

بما أن $S(C) = A$ فإن $a = 1 + i$

ومنه الكتابة المركبة لـ S هي $Z' = (1+i)\overline{Z}$

د) الكتابة المركبة لـ SoS هي $Z' = 2Z$

إذن SoS هو تحاكي مركزه النقطة O ونسبته 2 .

تمارين و مسائل

1 - λ عدد حقيقي ثابت. في المستوي المركب نعتبر النقط A ، B ، C لواحقها على الترتيب $Z_A=-1+2i$ ، $Z_B=3-i$ ، $Z_C=7+\lambda i$

1) تحقق أنه من أجل كل λ فإنه يوجد تشابه مباشر S وحيد بحيث $S(A)=B$ و $S(B)=C$

2) نفرض أن الكتابة المركبة لـ S من الشكل $Z'=aZ+b$ مع $a\neq 0$

أ) احسب a بدلالة λ.

ب) هل توجد قيمة لـ λ بحيث S :

انسحاب ؟ دوران ؟ تشابه مباشر زاويته $\frac{\pi}{2}$ ؟

2 - ABC مثلث متقايس الأضلاع من المستوي الموجه بحيث $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$

J منتصف $[AC]$ و O مركز ثقل المثلث ABC

أنشئ صورة المثلث ABC في كل حالة من الحالات التالية :

أ) بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ونسبته 2 و زاويته $-\frac{\pi}{3}$

ب) بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة J ونسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

3 - في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ للمستوي الموجه، التشابه المباشر S كتابته المركبة هي $Z'=2iZ-2$

1) أوجد صورة الدائرة (γ_1) التي مركزها I ذات اللاحقة $1+2i$ ونصف قطرها 2 بالتشابه S

2) أوجد صورة الدائرة (γ_2) التي مركزها J ذات اللاحقة i و نصف قطرها 1 بالتشابه S

3) أوجد صورة المستقيم d المار من نقط تقاطع (γ_1) و (γ_2).

4 - المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$ وحدة الرسم $5cm$

A ، B ، C نقط لواحقها i ، $\sqrt{2}$ ، و $\sqrt{2}+i$ على الترتيب، I منتصف القطعة $[OB]$ ،

نرمز بـ S إلى التشابه المباشر الذي يحول A إلى I و O إلى B .

1-أ) أوجد الكتابة المركبة لـ S.

ب) عين العناصر المميزة لـ S (المركز Ω، الزاوية والنسبة)

جـ) برهن أن Ω هي مركز ثقل المثلث ABC

2) نعرف متتالية النقط A_n بالكيفية التالية :

$A_0=A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n نضع $A_{n+1}=S(A_n)$

أ) علم النقط A_1، A_2، A_3 على الشكل.

ب) نرمز بـ U_n إلى طول القطعة $[A_nA_{n+1}]$

- عبر عن U_{n+1} بدلالة U_n
- احسب U_0 ثم اكتب U_n بدلالة n
- احسب $S_n=U_0+U_1+.....U_n$ بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

5 - في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر التشابه المباشر S الذي كتابته المركبة $Z'=\frac{1}{2}(1+i)Z+\frac{5}{2}(1+i)$ و Ω مركزه.

M_0 نقطة ذات اللاحقة $2+4i$ و $M_1=S(M_0)$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا $M_{n+1}=S(M_n)$. ابتداء من أي رتبة N_0 تكون النقط M_n تنتمي إلى قرص مركزه النقطة Ω ونصف قطره 10^{-2}.

6 - من أجل كل سؤال يمكن أن توجد عدة قضايا صحيحة، عين الصحيحة منها والخاطئة مبررا إجابتك في كل مرة.

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$، النقط A ، B ، I لواحقها على الترتيب 1 ، $1+2i$ ، 0 نرمز بـ S إلى التشابه المباشر الذي مركزه I وبحيث $S(A)=B$

أ) S له كتابة مركبة $Z'=\sqrt{5}(1+i)Z+i$

ب) النقطة C ذات اللاحقة $1-3i$ صورتها بالتشابه S هي النقطة C' ذات اللاحقة 5

جـ) إذا كانت D ذات اللاحقة $2-i$ فإن المثلثين AOC و BDC' متشابهان في الاتجاه المباشر

7 - اجب بنعم أو خطأ مبررا إجابتك على ما يلي :

1) كل تحاكي نسبته $-a^2$ هو تشابه مباشر نسبته a^2

2) التشابه المباشر S المركب من تحاكي مركزه O ونسبته $-\sqrt{2}$ ودوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$ زاويته هي $\frac{5\pi}{4}$

3) r الدوران الذي مركزه النقطة O و زاويته θ حيث $\theta\neq\pi$ و M' صورة M بالدوران r و I منتصف $[MM']$.

I هي صورة M بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\theta}{2}$ ونسبته $\cos\frac{\theta}{2}$ ؟

8 - A و B نقطتان مختلفتان و r_A و r_B دورانان مركزيهما على التوالي A و B وزاويتهما $\frac{\pi}{2}$. من أجل كل نقطة M من المستوي النقطتين M_1 و M_2 صورتي M

ب- و r_B و r_A على التوالي. نضع $t = r_B o r_A^{-1}$

أ) انشئ النقطة C حيث $C = t(A)$

ب) عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل t.

جـ) ما هي طبيعة الرباعي M_1M_2CA ؟

2) نفرض أن النقطة M تمسح الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$

أ) عين ثم انشئ المحل الهندسي للنقطة M_2 لما M تمسح (Γ)

ب) ليكن ω_1 و ω_2 منتصفي $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب، قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$ و $\overrightarrow{AC}$.

جـ) عين ثم ارسم المحل الهندسي للنقطة I منتصف $[M_1M_2]$ لما M تمسح (Γ).

9 - في المستوي الموجه، نعتبر مثلث متقايس الساقين ABC

بحيث $AB = AC$ و $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$

I نقطة بحيث أن المثلث CAI متقايس الساقين وقائم مع $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) = -\frac{\pi}{2}$، نضع

$AB = 5cm$

1) نسمي r_A الدوران الذي مركزه النقطة A ويحول النقطة B إلى C و r_C دوران مركزه النقطة C وزاويته $-\frac{\pi}{2}$. نضع $f = r_C o r_A$

أ) عين صورة كل من A و B بالتحويل f.

ب) بين أن f دوران يطلب تعيين زاويته ومركزه O.

جـ) بين أن الرباعي $ABOC$ معين.

2) S تشابه مباشر مركزه النقطة O ويحول النقطة A إلى B ولتكن C' صورة C بالتحويل S، H منتصف القطعة $[BC]$ و H' صورتها بالتشابه S.

أ) عين زاوية S ثم بين أن C' تنتمي إلى المستقيم (OA)

ب) عين صورة القطعة $[OA]$ بالتحويل S ثم بين أن H' منتصف $[OB]$

جـ) بين أن $(C'H')$ عمودي على (OB) ثم استنتج أن C' مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OBC.

10 - $(o, \vec{u}, \vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي الموجه، النقط A، B، C لواحقها على الترتيب i، $\sqrt{2}$، و $\sqrt{2}+i$.

النقط I، J، K منتصفات القطع $[OB]$، $[AC]$، $[BC]$ على الترتيب، نسمي S التشابه المباشر بحيث $S(A)=I$ و $S(O)=B$

1-أ) ما هي الكتابة المركبة لـ S؟

ب) ما هي اللاحقة ω للنقطة Ω مركز S.

جـ) ما هي صورة المستطيل $OBCA$ بالتشابه S؟

2) نعتبر التحويل $S^2 = S o S$

أ) برهن أن S^2 تحاكي يطلب تعين مركزه ونسبته

ب) ما هي صور النقط A، B، O بالتحويل S^2.

3) استنتج من الأسئلة السابقة أن المستقيمات (OC) و (BI) و (AK) متقاطعة.

11 - O و A نقطتان من المستوي الموجه بحيث $OA = 4cm$ و (γ) الدائرة ذات المركز O والتي تمر من A. و S التشابه المباشر الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\frac{1}{2}$.

1) عين (γ') صورة (γ) بـ S ثم عين مركز ونصف قطر (γ').

2) B النقطة الثانية المشتركة بين (γ) و (γ')، نضع $S(I)=B$ و $S(B)=J$

برهن أن النقطتين I و J متقابلتان قطريا بالنسبة إلى B على (γ) و (γ')

3) برهن أن J صورة I بتحاكي مركزه A يطلب تعيين نسبته.

12 - $(o, \vec{u}, \vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي الموجه، نعتبر النقط A و A'، B، B' لواحقها على التوالي $Z_A = 1-2i$، $Z_{A'} = -2+4i$، $Z_B = 3-i$، $Z_{B'} = 5i$

1-أ) علم النقط A، A'، B، B' ثم بين أن الرباعي $ABB'A'$ مستطيل.

ب) نسمي σ التناظر المحوري الذي محوره (Δ) بحيث $\sigma(A)=A'$ و $\sigma(B)=B'$

أوجد معادلة (Δ) ثم ارسم (Δ).

جـ) بين أن σ له كتابة مركبة $Z' = \frac{1}{5}(3+4i)\overline{Z} + 2i - 1$ ...... (I)

2) g التشابه الذي كتابته المركبة هي $Z' = -\frac{2}{5}(3+4i)\overline{Z} + 5 - i$

أ) نضع $C=g(A)$ و $D=g(B)$ أوجد لاحقتي C و D ثم علمهما في الشكل السابق.

ب) h التحاكي الذي نسبته -2 والمركز Ω ذات اللاحقة $1+i$

أوجد الكتابة المركبة لـ h ثم تحقق أن $h(A')=C$ و $h(B')=D$

جـ) نضع $f = h^{-1} o g$

أوجد الكتابة المركبة لـ f ثم استنتج أن $g = h o \sigma$

13 - $(o, \vec{u}, \vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي الموجه. f تحويل نقطي كتابته المركبة $Z' = -\frac{1}{2} i (\overline{Z} + 2 - 4i)$. و $\sigma_{(\Delta)}$ تناظر محوري محوره المستقيم $(\Delta) : y = 0$

1) أثبت أن $f o \sigma_{(\Delta)}$ تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره الأساسية.

2) أثبت أن $f o f$ تشابه مباشر، ثم أثبت أن f مركب تبديلي من تناظر محوري بالنسبة إلى مستقيم (d) يمر من $\omega(-2,0)$ وتحاكي مركزه ω ونسبته k حيث $k \rangle 0$

14 - $(o, \vec{u}, \vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي الموجه و S التشابه المباشر كتابته المركبة هي $Z' = (1 - i\sqrt{3})Z + 5\sqrt{3}$

1) عين العناصر الأساسية للتشابه S.

2) نعتبر التحويل S^n حيث $S^n = \underbrace{S o S o S o ....o S}_{n \text{ مرة}}$ حيث $n \geq 2$

أ) ما هي طبيعة التحويل S^n ؟ ثم عين عناصره المميزة

ب) ما هي قيم n التي من أجلها يكون S^n تحاكيا ؟

3) لتكن $M_0(-1,0)$ نقطة من المستوي ولنعرف متتالية النقط كما يلي :

$M_{n+1}=S(M_n)$ مع $n\in IN$

ولنعرف متتالية الأعداد الحقيقية (U_n) المعرفة بـ $U_n=\left\|\overrightarrow{\omega M_n}\right\|$ حيث ω مركز التشابه S

أ) برهن أن (U_n) متتالية هندسية ثم عين حدها الأول وأساسها.

ب) احسب بدلالة n المجموع $d_n=U_0+U_1+....+U_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$

جـ) عين المجموعة التي تنتمي إليها M_n بحيث $U_n\leq 2$

15 - $(o,\vec{u},\vec{v})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي الموجه ، ولتكن ω و ω' نقطتان منه لواحقهما على الترتيب Z_0 ، Z_1 وليكن r دوران مركزه ω' وزاويته $-\frac{\pi}{4}$ ، و h تحاكي مركزه ω ونسبته $\sqrt{2}$. ولتكن $M(x',y')$ صورة $M(x,y)$ بالتحويل hor لواحقهما Z' و Z على الترتيب.

1) عبر عن Z' بدلالة Z_0 ، Z_1 ، ثم عين طبيعة التحويل hor .

2) ما هي العلاقة بين Z_0 و Z_1 حتى يكون hor تشابه مباشر مركزه النقطة O وزاويته $(-\frac{\pi}{4})$ ونسبته $\sqrt{2}$.

16 - في المستوي المركب f تحويل نقطي كتابته المركبة $Z'=-2iZ+1+i$

1) بين أن f له نقطة صامدة وحيدة ω .

2-أ) ليكن h تحاكيا مركزه ω ونسبته 2 ، عين الكتابة الركبة لـ h ثم لـ h^{-1} .

ب) نضع $\sigma=f\,o\,h^{-1}$ ، عين الكتابة المركبة للتحويل σ

3) بين أن مجموعة النقط الصامدة بالتحويل σ هي مستقيم (d) يطلب تعيين معادلته، ثم استنتج طبيعة التحويل σ

4) بين أن f مركب من تحاكي وتناظر محوري ؟

17 - في معلم متعامد ومتجانس مباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، C ، D لواحقها $2i$ ، 1 ؛ 8 و (γ) دائرة محيطة بالمثلث ACD تقطع محور التراتيب في B .

1) برهن باستعمال استدلال هندسي أن المثلثين OAD و OCB متشابهان وغير متقايسين

2) ليكن S تشابها يحول المثلث OAD إلى المثلث OCB

أ) عين نسبة S ، ب) لماذا S تشابه غير مباشر مختلف عن التناظر؟

جـ) لماذا S له نقطة صامدة وحيدة هي مبدأ المعلم ؟

د) ما هي الكتابة المركبة لـ S ؟

3-أ) ليكن h تحاكيا مركزه O ونسبته $\frac{1}{2}$ ، عين الكتابة الركبة لـ h^{-1}

ب) نضع $\sigma=s\,o\,h^{-1}$ ما هي الكتابة المركبة لـ σ ؟

ثم بين أن σ يقبل المستقيم ذو المعادلة $y=x$ كمجموعة نقط صامدة.

جـ) استنتج طبيعة σ ثم بين أن S هو مركب من تحاكي وتناظر محوري.

18 - I) في المستوي الموجه، $OIBJ$ مربع طول ضلعه 1 وبحيث $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})=\frac{\pi}{2}$

A نقطة من نصف المستقيم $[JI)$ مختلفة عن I و J . نرمز بـ S إلى التشابه الذي مركزه النقطة O وبحيث $S(I)=A$

1) أنشئ صورة المربع $OIBJ$ بالتحويل S ، نضع $S(B)=B'$ و $S(J)=J'$

2) في هذا السؤال نريد إثبات أن B' هي نقطة من (BJ) من أجل ذلك نرمز بـ: σ إلى التشابه المباشر ذو المركز O والزاوية $\frac{\pi}{4}$ والنسبة $\sqrt{2}$.

أ) حدد $\sigma(A)$ و $\sigma(I)$ و $\sigma(J)$

ب) استنتج أن B' نقطة من المستقيم (JB)

3) في هذا السؤال نريد إنشاء النقطة $A'=S(A)$

أ) لماذا A' نقطة من $(J'A)$ ؟

ب) أنشئ صورة المستقيم (OA) بـ S ثم استنتج إنشاء A' .

II) نزود الآن المستوي بمعلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{I},\vec{J})$ ولتكن m فاصلة A مع m عدد حقيقي من المجال $]0,+\infty[$ ويختلف عن 1 .

1-أ) برهن أن اللاحقة a لـ A هي $a=m+i(1-m)$

ب) برهن أن التشابه S له كتابة مركبة $Z'=[m+i(1-m)]Z$

جـ) استنتج أن A' لاحقتها a^2 و B' لاحقتها $(2m-1)+i$.